Workshop i differentialligninger

Knut Ibæk Topp Lindenhoff (knut@unf.dk)
Rasmus Frigaard Lemvig (rle@unf.dk)

Ungdommens Naturvidenskabelige Forening København

Dato: 28-03-2022

Velkommen til denne workshop i differentialligninger. Differentialligninger er blandt de nyttigste matematiske redskaber, mennesker har til at beskrive fænomener i naturvidenskab. Workshoppen starter med en kort introduktion til emnet, og derefter introducerer vi to typer differentialligninger og deres løsningsformler. Det meste af tiden er afsat til, at man selv regner på tingene. Det er her, den rigtige læring finder sted! Til slut skal vi se på en anvendelse af differentialligninger i pension og kemiteknik.

1 Introduktion - hvad er differentialligninger?

I sædvanlige ligninger er vi vant til, at løsninger er tal. Har vi f.eks. ligningen

$$x = 3x + 4$$

kan vi løse den ved først at trække $3x$ fra på begge sider og få $-2x = 4$. Dividerer vi med -2 på begge sider, har vi $x = -2$. Ligeledes kan ligningen

$$x^2 + 4x - 3 = 0$$

løses ved hjælp af formlen til løsning af andengradsligninger. Alt dette burde være velkendt. En differentialligning er anderledes. Her er løsningerne ikke tal, men funktioner. En differentialligning er en ligning i en funktion y, som afhænger af en variabel x, og hvor y og dens afledte indgår. Formålet med differentialligninger er at bestemme en funktion y, som løser ligningen for alle x. Et simpelt eksempel kunne være

$$y'(x) = 2x.$$

Her giver integralregning os løsningen. Integrerer vi begge sider med hensyn til x, får vi

$$\int y'(x)dx = \int 2xdx,$$

og dermed fås

$$y(x) = x^2 + c$$

for en konstant c. c kan være hvad som helst, og dermed findes uendelig mange løsninger til differentialligningen. Løsningen ovenover kaldes den *fuldstændige* løsning. Hvis vi indfører kravet $y(0) = 0$, får vi $c = 0$, så med denne ekstra betingelse har vi kun én løsning. Løsningen $y(x) = x^2$ kaldes en *partikulær* løsning. En betingelse $y(a) = b$ kaldes en *startbetingelse* eller en *randbetingelse* alt efter konteksten for problemet.

Er man i tvivl om, hvorvidt ens fundne løsning til en differentialligning faktisk er en løsning, kan man altid indsætte løsningen i differentialligningen og tjekke, at ligningen stemmer. Vi kalder dette at *gøre prøve*. Lad os f.eks. indsætte $y(x) = x^2+3$ i ligningen ovenover. Da $y'(x) = 2x$, ser vi, at y er en løsning. Havde vi indsat $y(x) = x^3$ i stedet, havde vi fået $y'(x) = 3x^2 \neq 2x$, så dette y er ikke en løsning. Lad os tage et eksempel til på en differentialligning:

$$y'(x) = 3y(x), \quad y(0) = 2.$$

Vi leder her efter en funktion, som er lig sin afledte ganget med en konstant. Vi ved, at $y(x) = e^x$ opfylder $y'(x) = y(x)$ for alle valg af c. Kædereglen giver, at $y(x) = e^{3x}$ opfylder $y'(x) = 3e^{3x} = 3y(x)$. Så $y(x) = e^{3x}$ opfylder selve differentialligningen, men opfylder den randbetingelsen? Vi har $y(0) = e^{3\cdot 0} = 1$. Så vi skal nok modificere funktionen en smule. Lad $y(x) = ce^{3x}$ for en konstant c. Da er

$$y'(x) = 3ce^{3x} = 3y(x)$$

og $y(0) = ce^{3\cdot 0} = c$. Så vælg $c = 2$. Vi ser da, at $y(x) = 2e^{3x}$ er løsningen til differentialligningen, som også opfylder randbetingelsen. Differentialligningen ovenover er et specialtilfælde af en mere generel form for differentialligninger, nemlig førsteordens differentialligninger på formen

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

Vi skal se, hvordan sådan nogle ligninger løses senere i workshoppen. Denne slags ligninger dukker op i mange sammenhænge. Til opgaverne skal I være velkomne til at benytte følgende tabel over funktioner og deres afledte og stamfunktioner:

$\int f(x)dx$	$f(x)$	$f'(x)$	Note
$ax + c$	a	0	
$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	x^n	nx^{n-1}	$n \neq -1, 0$
$x\ln(x) - x + c$	$\ln(x)$	$1/x$	
$\ln(x) + c$	$1/x$	$-1/x^2$	
$e^x + c$	e^x	e^x	
$\sin(x) + c$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$-\cos(x) + c$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	

Derudover genkalder vi os følgende regler for stamfunktioner.

Sætning 1.1 (**Substitution**). *For differentiable funktioner f og g gælder*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy.$$

Sætning 1.2 (**Partiel integration**). *Lad f og g være kontinuerte med stamfunktioner F og G. Da gælder*

$$\int F(x)g(x)dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)dx.$$

1.1 Opgaver

• **Opgave 1.1:**

Løs følgende differentialligninger:

1)$y'(x) = 3x^2$, $y(0) = 2$.

2)$5y'(x) = x^2 + x$, $y(0) = 1$.

3)$y'(x) = -1/x^2$, $y(1) = -1$.

•• **Opgave 1.2:**

Løs følgende differentialligninger:

1)$y'(x) = 10y(x)$.

2)$y'(x) = x^n$.

2 Separation af variable

I denne sektion skal vi studere en teknik, som kan benyttes til at løse særlige former for differentialligninger. Vi lægger ud med at bevise, at teknikken virker, og derefter giver vi en huskeregel, som gør den nem at bruge i praksis. Antag, at vi har en differentialligning på formen

$$f(y(x))y'(x) = g(x)$$

for nogle kontinuerte funktioner f og g. Da kan vi integrere begge sider med hensyn til hver sin variabel som følger:

$$\int f(y(x))y'(x)dx = \int g(x)dx.$$

Benytter vi substitution for stamfunktioner fås

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx.$$

Det smarte er, at $y'(x)$ forsvinder, når vi gør dette. Teknikken viser sig at være smart i mange sammenhænge, men den kræver nogle eksempler at forstå. Inden vi kaster os ud i et eksempel, genkalder vi, at man for $y'(x)$ også kan skrive

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Eksempel 2.1. Lad os betragte differentialligningen

$$y(x)^2 y'(x) = 2x.$$

Vi ser, at den har den ønskede form (her er $f(x) = x^2$ og $g(x) = 2x$). Vi omskriver ligningen

$$y(x)^2 \frac{dy}{dx} = 2x.$$

og leger, at dy/dx er en brøk, så vi kan gange med dx på begge sider og få[1]

$$y(x)^2 dy = 2xdx,$$

hvorefter vi indsætter integraltegn:

$$\int y(x)^2 dy = \int 2xdx.$$

Vi ved, at en stamfunktion til y^2 er $y^3/3$, og at højresiden er $x^2 + c$ (det er nok at indsætte en integrationskonstant på én side af lighedstegnet), så vi får

$$\frac{y(x)^3}{3} = x^2 + c$$

dvs.

$$y(x)^3 = 3x^2 + 3c.$$

Lad $C = 3c$. Tager vi kubikroden på begge sider, får vi

$$y(x) = \sqrt[3]{3x^2 + C}.$$

Den her løsning havde vi nok ikke umiddelbart gættet os frem til!

[1]Heldigvis er begge arrangører for workshoppen ikke rene matematikere, så vi kan godt holde til at benytte denne slags beskidte tricks.

Det skal her nævnes, at vores trick med at behandle dy/dx som en brøk ikke er matematisk stringent, men blot en huskeregel. Det er udledningen i starten af sektionen, som garanterer, at metoden er korrekt.

Eksempel 2.2. Lad os tage endnu et eksempel, inden vi springer til opgaverne. Betragt differentialligningen

$$\frac{1}{y(x)} = \frac{x - 7x^2}{y'(x)}.$$

Vi starter med at omskrive ligningen ved at gange med $y'(x)$ på begge sider

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = x - 7x^2,$$

og vi ser, at differentialligningen har den rigtige form til, at vi kan benytte separation af variable. Vi har

$$\frac{1}{y(x)} \frac{dy}{dx} = x - 7x^2,$$

og dermed

$$\frac{1}{y(x)} dy = (x - 7x^2) dx,$$

som vi kan integrere på begge sider:

$$\int \frac{1}{y(x)} dy = \int x - 7x^2 dx.$$

Højresiden integrerer til:

$$\frac{x^2}{2} - \frac{7}{3} x^3 + c,$$

og venstresiden integrerer til $\ln(y(x))$. Fortsætter vi beregningen fra før, får vi

$$\ln(y(x)) = \frac{x^2}{2} - \frac{7}{3} x^3 + c.$$

For at isolerere $y(x)$ skal vi blot tage eksponentialfunktionen på begge sider og få svaret

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2} - \frac{7}{3} x^3 + c}$$

for en vilkårlig konstant c. Lader vi $C = e^c$, kan resultatet alternativt skrives som

$$y(x) = C e^{\frac{x^2}{2} - \frac{7}{3} x^3},$$

hvor C er en positiv konstant.

2.1 Opgaver

- **Opgave 2.1:**
  Løs følgende differentialligning:

$$5y(x)y'(x) = 1.$$

- **Opgave 2.2:**
  Løs følgende differentialligning:

$$-\frac{y'(x)}{y(x)^2} = e^x.$$

- **Opgave 2.3:**
  Løs følgende differentialligning:

$$\frac{1}{y(x)} = \frac{5x^8}{y'(x)}.$$

- **Opgave 2.4:**
  Løs følgende differentialligning:

$$y(x)y'(x) = \ln(x).$$

- **Opgave 2.5:**
  Løs følgende differentialligning:

$$y(x)^3 y'(x) = e^x + x.$$

- **Opgave 2.6:**
  Løs følgende differentialligning:

$$\frac{x \cdot e^x}{y'(x)} - y(x) = 0.$$

•• **Opgave 2.7:**
Løs følgende differentialligning:

$$\cos(y(x))y'(x) = 6x^4.$$

•• **Opgave 2.8:**
Løs følgende differentialligning:

$$y'(x) = y(x)^4 \cdot x^4.$$

•• **Opgave 2.9:**
Løs følgende differentialligning:

$$\frac{x\ln(x)}{\sin(y(x))} - y'(x) = 0.$$

•• **Opgave 2.10:**
Løs følgende differentialligning:

$$y''(x) = y'(x)^2.$$

Vink: Løs først for $y'(x)$ og derefter for $y(x)$.

●● **Opgave 2.11:**
Løs følgende differentialligning:

$$\cos(y)\sin(y) = \frac{3x+5}{y'(x)}.$$

●● **Opgave 2.12:**
Løs følgende differentialligning:

$$e^{-y(x)}y'(x) = 2x\cos(x^2).$$

●●● **Opgave 2.13: Populationstilvækst**
Vi skal her se på en simpel populationsmodel. Lad $P(t)$ betegne befolkningen til tid t. Da antager vi, at P opfylder differentialligningen

$$P'(t) = kP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right)$$

hvor K er den maksimale befolkning, omgivelserne kan understøtte. k er vækstfaktoren. Jo højere k, jo højere vækst. Løs differentialligningen for P. Vink: du kan benytte omskrivningen

$$\frac{1}{P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right)} = \frac{K}{P(t)(K - P(t))} = \frac{1}{P(t)} + \frac{1}{K - P(t)}.$$

3 Førsteordens lineære differentialligninger

En *førsteordens* differentialligning er en differentialligning, hvor kun $y(x)$ og dens førsteafledte $y'(x)$ kan indgå. Vi har set adskillige eksempler i opgaverne. Et ikke-eksempel er

$$y''(x) + 3xy'(x) = x^2,$$

thi den andenafledte $y''(x)$ indgår. *Lineær* refererer til, at der ikke indgår højere potenser af $y(x)$ end 1. En førsteordens lineær differentialligning er altså en differentialligning på formen

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$$

for funktioner f og g. Vi har en fuldstændig løsningsformel til denne slags differentialligninger, som følgende sætning giver.

Sætning 3.1 (**Panserformlen**)**.** *Lad f og g være kontinuerte funktioner og F en stamfunktion til f. Da er den fuldstændige løsning til differentialligningen*

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$$

givet ved

$$y(x) = e^{-F(x)} \left(\int e^{F(x)} g(x)dx + c \right)$$

for en konstant c.

Bevis. Vi starter med at tage ligningen

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$$

og gange igennem med $e^{F(x)}$:

$$e^{F(x)}y'(x) + e^{F(x)}f(x)y(x) = e^{F(x)}g(x).$$

Venstresiden er noget, vi kan genkende. Ved at bruge produktreglen fås

$$\frac{d}{dx}\left(e^{F(x)}y(x)\right) = e^{F(x)}F'(x)y(x) + e^{F(x)}y'(x) = e^{F(x)}f(x)y(x) + e^{F(x)}y'(x).$$

Vender vi tilbage til ligningen fra før, får vi

$$\frac{d}{dx}\left(e^{F(x)}y(x)\right) = e^{F(x)}g(x).$$

Integrerer vi begge sider, får vi

$$e^{F(x)}y(x) + c' = \int e^{F(x)}g(x)dx,$$

for en konstant c'. Ganges ligningen igennem med $e^{-F(x)}$ fås

$$y(x) + c'e^{-F(x)} = e^{-F(x)} \int e^{F(x)}g(x)dx.$$

Vi lader $c = -c'$ og får

$$y(x) - ce^{-F(x)} = e^{-F(x)} \int e^{F(x)}g(x)dx.$$

Vi lægger $ce^{-F(x)}$ til på begge sider og sætter $e^{-F(x)}$ ud foran en parantes, hvilket giver

$$y(x) = e^{-F(x)} \int e^{F(x)} g(x) dx + ce^{-F(x)} = e^{-F(x)} \left(\int e^{F(x)} g(x) dx + c \right),$$

og beviset er færdigt. ■

Lad os tage nogle eksempler.

Eksempel 3.2. Betragt differentialligningen

$$y'(x) + 3xy(x) = x.$$

Vi genkender straks dette som en førsteordens lineær differentialligning. Her er $f(x) = 3x$ og $g(x) = x$. En stamfunktion til f er $F(x) = 3x^2/2$. Panserformlen giver

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\frac{3x^2}{2}} \left(\int e^{\frac{3x^2}{2}} x dx + c \right) \\ &= e^{-\frac{3x^2}{2}} \left(\frac{1}{3} \int e^{\frac{3x^2}{2}} 3x dx + c \right). \end{aligned}$$

Her kan vi benytte substitution til at udregne det ubestemte integral. Lad $u(x) = 3x^2/2$, da er $u'(x) = 3x$, så vi får

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\frac{3x^2}{2}} \left(\frac{1}{3} \int e^u du + c \right) = e^{-\frac{3x^2}{2}} \left(\frac{1}{3} e^u + c \right) \\ &= e^{-\frac{3x^2}{2}} \left(\frac{1}{3} e^{\frac{3x^2}{2}} + c \right) = \frac{1}{3} + ce^{-\frac{3x^2}{2}}. \end{aligned}$$

Hvad hvis vi havde en startbetingelse? Hvis f.eks. $y(0) = 0$, da har vi

$$0 = \frac{1}{3} + ce^{-\frac{3 \cdot 0^2}{2}} = \frac{1}{3} + c,$$

så $c = -1/3$. Dermed bliver den partikulære løsning til ligningen med randbetingelsen $y(0) = 0$ lig

$$y(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{-\frac{3x^2}{2}}.$$

Eksempel 3.3. Det er ikke altid, at man kan skrive en eksplicit løsning op til en differentialligning. Havde vi modificeret den forrige differentialligning til

$$y'(x) + 3xy(x) = 1,$$

havde vi ikke kunne nedskrive løsningen eksplicit, thi funktionen

$$e^{\frac{3x^2}{2}}$$

ikke har en eksplicit stamfunktion. Dette skal forstås som, at den ikke kan nedskrives som et konkret udtryk, man er nødt til at nøjes med det lidt utilfredsstillende udtryk

$$\int e^{\frac{3x^2}{2}} dx.$$

Ikke desto mindre eksisterer stamfunktionen, og der findes numeriske metoder til at regne med den. Disse vil være implementeret i CAS-programmer som f.eks. Maple.

Ligesom vi har set før med separation af variable, kan det til tider være nødvendigt at omskrive lidt på en differentialligning for at se, at den er en førsteordens lineær differentialligning. Et eksempel er herunder.

Eksempel 3.4. Betragt differentialligningen

$$\frac{y'(x)}{\sin(x)} = 1 - y(x).$$

Vi starter med at lægge $y(x)$ til på begge sider. Da får vi

$$\frac{y'(x)}{\sin(x)} + y(x) = 1.$$

Vi kan herefter gange igennem med $\sin(x)$ og få

$$y'(x) + y(x)\sin(x) = \sin(x).$$

Nu kan vi løse for $y(x)$ med panserformlen. En stamfunktion til sin er $-\cos$. Vi har da

$$y(x) = e^{\cos(x)}\left(\int e^{-\cos(x)}\sin(x)dx + c\right),$$

og integralet løses let med substitutionen $u(x) = -\cos(x)$, så svaret bliver

$$y(x) = e^{\cos(x)}\left(\int e^{u}du + c\right) = e^{\cos(x)}\left(e^{-\cos(x)} + c\right) = 1 + ce^{\cos(x)}.$$

I mange tilfælde er det interessant at løse lineære førsteordens differentialligninger med randbetingelser. Følgende sætning giver løsningen til den slags problemer. Beviset er fra [2].

Sætning 3.5 (**Panserformlen med randbetingelse**). *Lad f og g være kontinuerte funktioner og a og b reelle tal. Da eksisterer der en unik løsning til differentialligningen*

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x),$$

sådan at $y(a) = b$. Løsningen er givet ved

$$y(x) = e^{-\int_a^x f(t)dt}\left(\int_a^x g(t)e^{\int_a^t f(s)ds}dt + b\right).$$

Bevis. For at vise, at det givne udtryk virkelig er en løsning, kan man naturligvis gøre prøve. Det er dog lettere blot at henvise til panserformlen, hvori vi viste, at $y(x)$ virkelig er en løsning. Vi skal blot bemærke, at

$$\int_a^x f(t)dt \quad \text{og at} \quad \int_a^x g(t)e^{\int_a^t f(s)ds}dt$$

er stamfunktioner til hhv. $f(x)$ og $g(x)e^{\int_a^x f(s)ds}$. Vi skal dog også tjekke, at randbetingelsen $y(a) = b$ er opfyldt. Vi ved, at hvis et bestemt integral har ens grænser, er integralet 0, så vi får

$$y(a) = e^{-\int_a^a f(t)dt}\left(\int_a^a g(t)e^{\int_a^t f(s)ds}dt + b\right) = e^0(0 + b) = b.$$

Vi mangler nu kun at bevise unikhed af løsningen. Vælg en stamfunktion F til f og definér de to løsninger

$$y_1(x) = e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)}g(x)dx + c_1\right)$$
$$y_2(x) = e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)}g(x)dx + c_2\right),$$

og antag, at de begge opfylder randbetingelsen. Vi skal vise, at de to funktioner er ens. Vi har

$$y_1(x) - y_2(x) = e^{-F(x)}(c_1 - c_2)$$

og dermed for $x = a$:

$$y_1(a) - y_2(a) = e^{F(a)}(c_1 - c_2).$$

Venstresiden er lig $b - b = 0$, og $e^{F(a)} \neq 0$, så $c_1 - c_2 = 0$. Med andre ord er $c_1 = c_2$, og de to løsninger er ens. ■

Vi skal i sidste afsnit se nogle interessante virkelig eksempler på lineære førsteordens differentialligninger med randbetingelser. Lad os dog tage et enkelt eksempel inden opgaverne.

Eksempel 3.6. Betragt

$$y'(x) - 3y(x) = e^{2x}, \quad y(0) = 0.$$

Vi genkender straks dette som en differentialligning af den ønskede form, så vi indsætter i panserformlen med randbetingelser:

$$y(x) = e^{-\int_0^x -3dt}\left(\int_0^x e^{2t}e^{\int_0^t -3ds}dt + 0\right) = e^{3x}\int_0^x e^{2t-3t}dt$$
$$= e^{3x}\int_0^x e^{-t}dt = e^{3x}\left[-e^{-t}\right]_0^x = e^{3x}(1 - e^{-x}).$$

3.1 Opgaver

●● **Opgave 3.1:**
Løs følgende differentialligning:

$$y'(x) + 2x^2y(x) = x^2.$$

●● **Opgave 3.2:**
Løs følgende differentialligning:

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \ln(x).$$

●● **Opgave 3.3:**
Løs følgende differentialligning:

$$y'(x)x^2 + y(x) = 1$$

●● **Opgave 3.4:**

Løs følgende differentialligning:

$$xy'(x) + y(x) - e^x = 0.$$

●● **Opgave 3.5:**

Løs følgende differentialligning med randbetingelse

$$y'(x) + 2e^x y(x) = e^x, \quad y(1) = e.$$

●● **Opgave 3.6:**

Løs følgende differentialligning med randbetingelse

$$e^{-2x} y'(x) + e^{2x} y(x) = e^{2x}, \quad y(0) = 2.$$

●● **Opgave 3.7:**

Løs følgende differentialligning med randbetingelse

$$5xy'(x) + 10x^2 y(x) = 15x^2, y(0) = 0.$$

4 Anvendelser: Kemiteknik og pension

4.1 Pension

Den grundlæggende problemstilling i pension og livsforsikring er at sikre, at virksomheden har nok penge i reserve til at udbetale et aftalt beløb til kunden på et defineret tidspunkt. Lad os her fokusere på pension. Et pensionsprodukt kan se ud på flere måder, men en typisk pensionsaftale siger, at kunden skal betale en løbende *præmie* (typisk hver måned) indtil et fastdefineret tidspunkt m, nemlig tidspunktet for pensionering. m kunne f.eks. være 70 år (nok senere for mange unge mennesker i dag). Efter tidspunkt m betaler pensionsselskabet til kunden. En *kapitalpension* udbetaler ét beløb på tidspunkt m, og så må kunden selv sørge for at bruge pengene fornuftigt indtil død. De fleste vælger dog en såkaldt *ratepension*, hvor selskabet hver måned udbetaler et beløb til kunden indtil et tidspunkt $n > m$, hvor kontrakten udløber.

Lad os få matematikken på plads. Det skal her nævnes, at vi arbejder med en meget simpel model, hvor man kun kan være i arbejde eller på pension. F.eks. tager modellen ikke højde for andre tilstande såsom perioder med invaliditet eller arbejdsløshed. Vi har følgende størrelser i spil:

$$V(t), \pi(t), b(t), \mu_x(t), r(t).$$

Lad os forklare disse størrelser hver for sig.

- $V(t)$ betegner *reserven* til tid t. Reserven er nutidsværdien af det samlede forventede fremtidige beløb til kunden.
- $\pi(t)$ betegner *præmieraten* til tid t. Præmien er den kontinuerlige indbetaling fra kunden til selskabet.
- $b(t)$ betegner *ydelsesraten* fra selskabet til kunden til tid t, dvs. forpligtelsen fra selskabet overfor kunden. Den kan være kontinuert, men den kan også indeholde såkaldte *klumpbetalinger*, dvs. en sum, der udbetales på specifikke tidspunkter.
- $\mu_x(t)$ (μ er det græske bogstav my) betegner *dødelighedsintensiteten* for en x-årig person til tid t. Fortolkningen er som følger: Antag, at en x-årig person er i live til tid t. Da er sandsynligheden for at dø i tidsrummet $(t, t + dt]$ approksimativt lig $\mu_x(t)dt$, hvis dt er meget lille.
- $r(t)$ er den *korte rente* til tid t. Renten skal forstås i generel forstand, nemlig som et sammensurium af afkast på investeringer, fortjeneste på køb af salg og aktiver (aktier, ejendomme etc.) med mere. Den faktiske rente $i(t)$ i procent er relateret til $r(t)$ gennem
$$i(t) = e^{\int_0^t r(s)ds} - 1.$$

Spørgsmålet for pensionskasser er naturligvis, hvad reserven $V(t)$ skal være på et givent tidspunkt t. Dette er ikke en simpel problemstilling! Vi ved jo ikke, hvad renten er i fremtiden. Det er umuligt at forudsige afkast fra udlejning af ejendomme, dividender fra aktier, aktiekurser osv. Ikke desto mindre har vi værktøjer, som tillader os at opskrive udtryk for reserven, hvilket er formålet med denne sektion. Vores hovedværktøj er *Thieles differentialligning* [2] givet ved

$$V'(t) = \pi(t) - b(t)\mu_x(t) + (r(t) + \mu_x(t))V(t).$$

[2] Efter Thorvald Nicolai Thiele, en dansk statistiker, matematiker og professor i astronomi, se [1].

Lad os tænke over, hvorfor differentialligningen ser ud, som den gør. Ligningen beskriver ændringen i reserven til tidspunkt t. Til tidspunktet t indbetales $\pi(t)$. Der udbetales også $b(t)$ til kunden, hvis kunden stadig er i live, hvilket er fortolkningen af leddet $-b(t)\mu_x(t)$. Sidste led $(r(t) + \mu_x(t))V(t)$ beskriver en tilvækst af reserven afhængig af reservens nuværende størrelse. $r(t)V(t)$ er rentetilvæksten, og $\mu_x(t)V(t)$ er tilvæksten på reserven, der kommer af, at andre forsikrede kan dø og efterlader deres opsparing til fællesskabet. Har vi en randbetingelse? Ja, fordi til tidspunktet n (ved udløb) skylder selskabet kun $b(n)$ til kunden, hvor $b(n)$ betegner en klumpbetaling til tid n. Vi omskriver differentialligningen til

$$V'(t) - (r(t) + \mu_x(t))V(t) = \pi(t) - b(t)\mu_x(t), \quad V(n) = b(n),$$

og denne kan løses med panserformlen med randbetingelse:

$$\begin{aligned} V(t) &= e^{-\int_n^t -(r(s)+\mu_x(s))ds} \left(\int_n^t (\pi(s) - b(s)\mu_x(s)) e^{\int_n^s -(r(u)+\mu_x(u))du} ds + b(n) \right) \\ &= e^{\int_n^t r(s)+\mu_x(s)ds} \int_t^n (b(s)\mu_x(s) - \pi(s)) e^{\int_s^n r(u)+\mu_x(u)du} ds + b(n) e^{\int_n^t r(s)+\mu_x(s)ds} \\ &= \int_t^n (b(s)\mu_x(s) - \pi(s)) e^{-\int_t^s r(u)+\mu_x(u)du} ds + b(n) e^{-\int_t^n r(s)+\mu_x(s)ds}. \end{aligned}$$

Lad os fortolke dette udtryk, som kaldes et *prospektivt reserveudtryk*. En højere præmiebetaling giver en mindre reserve, hvilket giver mening, da vi skal reservere færre penge, hvis vi ved, at der kommer højere indbetalinger. Ligeledes skal reserven være større, hvis vi skal betale mere til kunden, altså at $b(t)$ bliver større. Udtrykket

$$e^{-\int_t^s r(u)+\mu_x(u)du}$$

kaldes en *diskonteringsfaktor* fra t til s. Den er lig den faktor, en sum penge er værd til tidspunkt s sammenlignet med tidspunktet t. Som tiden t bevæger sig frem mod pensionstidspunktet n, vil vi skulle tilbagediskontere med en lavere faktor grundet rentetilvæksten og dødelighedstilvæksten (i hvert fald i et økonomisk scenarie med positiv rente). Det sidste led

$$b(n)e^{-\int_t^n r(s)+\mu_x(s)ds}$$

fortæller, at vi skal reservere $b(n)$ med den værdi, $b(n)$ har til tidspunktet t. Lad os tage to eksempler, hvor vi benytter teorien.

Eksempel 4.1 (**Ren oplevelsesforsikring**)**.** Betragt en kontrakt, der udbetaler 1 til kunden til tid n, såfremt kunden stadig lever til tid n. Sådan en kontrakt kaldes en *ren oplevelsesforsikring*. 1 kan her betyder 1 million, 100.000 eller hvad, man end ønsker. Vi antager, at kunden indbetaler en løbende konstant præmie π indtil tid n. Vi har $b(n) = 1$ og $b(t) = 0$ for alle $t < n$. Formlen for reserven giver da

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_t^n -\pi e^{-\int_t^s r(u)+\mu_x(u)du} ds + e^{-\int_t^n r(s)+\mu_x(s)ds} \\ &= -\pi \int_t^n e^{-\int_t^s r(u)+\mu_x(u)du} ds + e^{-\int_t^n r(s)+\mu_x(s)ds}. \end{aligned}$$

Et godt spørgsmål er, hvad præmien π skal være. *Ækvivalensprincippet* dikterer, at den forventede værdi af præmier og den forventede værdi af ydelser skal være ens. Dette sikrer, at ingen vinder på arrangementet. Matematisk betyder ækvivalensprincippet, at $V(0) = 0$ i det her tilfælde. Vi har da

$$0 = V(0) = -\pi \int_0^n e^{-\int_0^s r(u)+\mu_x(u)du} ds + e^{-\int_0^n r(s)+\mu_x(s)ds},$$

og denne løses let for π:

$$\pi = \frac{e^{-\int_0^n r(s)+\mu_x(s)ds}}{\int_0^n e^{-\int_0^s r(u)+\mu_x(u)du} ds}.$$

Eksempel 4.2 (**Ratepension**). Vi har en kontrakt som følger: Fra tid 0 til m indbetaler kunden en konstant præmie π, og fra tid m til n betaler selskabet ydelsen b til kunden, så længe vedkommende er i live. Der er ingen klumpbetalinger, så $V(n) = 0$, da vi intet skylder kunden til tid n. Vi har altså $b(t) = 0$ for $0 \leq t \leq m$ og $b(t) = b$ for $m < t \leq n$. På samme måde har vi $\pi(t) = \pi$ for $0 \leq t \leq m$ og $\pi(t) = 0$ for $m < t \leq n$. På et tidspunkt $t < m$ ser reserven altså således ud:

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_t^m -\pi e^{-\int_t^s r(u)+\mu_x(u)du} ds + \int_m^n b\mu_x(s) e^{-\int_t^s r(u)+\mu_x(u)du} \\ &= -\pi \int_t^m e^{-\int_t^s r(u)+\mu_x(u)du} ds + b \int_m^n \mu_x(s) e^{-\int_t^s r(u)+\mu_x(u)du}. \end{aligned}$$

For $m < t \leq n$ er reserven

$$b \int_t^n \mu_x(s) e^{-\int_t^s r(u)+\mu_x(u)du}.$$

For at opnå en fair kontrakt for både selskab og kunde, giver ækvivalensprincippet, at $V(0) = 0$. Prøv at løse for hhv. π og b under denne betingelse.

5 Litteraturliste og videre læsning

Ønsker I at vide mere om differentialligninger, er bogen Kalkulus [2] af Tom Lindstrøm rigtig god. Den dækker også differential- og integralregning samt følger og rækker, der er vigtige i mange sammenhænge. Grundlæggende livsforsikring dækkes godt af Ragnar Norbergs noter [3], omend de er lidt gamle og mangler figurer.

[1] Steffen L. Lauritzen. *Thiele: Pioneer in statistics*. Oxford University Press, 2002. ISBN 978-01-98-50972-1.

[2] Tom Lindstrøm. *Kalkulus*. Universitetsforlaget, 2018. ISBN 978-82-15-02710-4.

[3] Ragnar Norberg. Basic life insurance mathematics, 2002. URL `https://web.math.ku.dk/~mogens/lifebook.pdf`.