Vektorfunktioner

UNF København

Ungdommens Naturvidenskabelige Forening

5. december 2023

Program

Program

1. Vektorer: genopfriskning
2. Hvad er vektorfunktioner
3. Den afledte af en vektorfunktion
4. Kurvelængder

Vektorer

Definition

En *n*-dimensional (reel) *vektor* er en ordnet liste

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

hvor $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ kaldes vektorens *indgange*. Mængden af *n*-dimensionelle vektorer betegnes $\mathbb{R}^n$.

Vektorer

Definition

En *n*-dimensional (reel) *vektor* er en ordnet liste

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

hvor $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ kaldes vektorens *indgange*. Mængden af *n*-dimensionelle vektorer betegnes $\mathbb{R}^n$.

Eksempler på vektorer i $\mathbb{R}^2$ er

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Program

Hvad er vektorfunktioner?

En vektorfunktion er en funktion, der tildeler en vektor til et reelt tal.

Definition

En *vektorfunktion*/*parameterfremstilling* er en funktion fra $\mathbb{R}$ (eller et interval i $\mathbb{R}$) til $\mathbb{R}^n$ for et positivt heltal n, altså en funktion på formen

$$r(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Funktionerne x_i kaldes *koordinatfunktionerne* hørende til r. Inputtet t kaldes til tider for *parameteren*.

Eksempel: den rette linje

Lad

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

være givne vektorer i $\mathbb{R}^n$. Da beskriver vektorfunktionen

$$r(t) = a + bt = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 t \\ b_2 t \\ \vdots \\ b_n t \end{pmatrix}$$

en ret linje gennem a med retningen b. Vi tager et konkret eksempel på tavlen.

Eksempel: cirklen

Lad

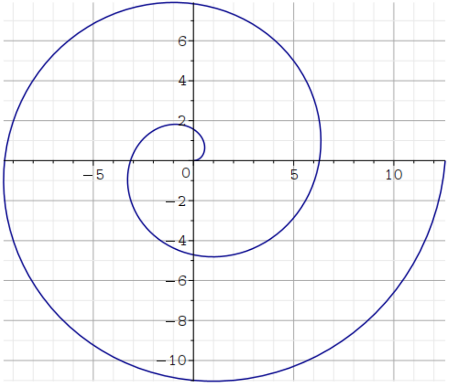
$$r(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}, \quad r > 0 \text{ konstant}$$

Dette er en parametriseringen af cirklen med radius r.

Eksempel: Archimedes' spiral

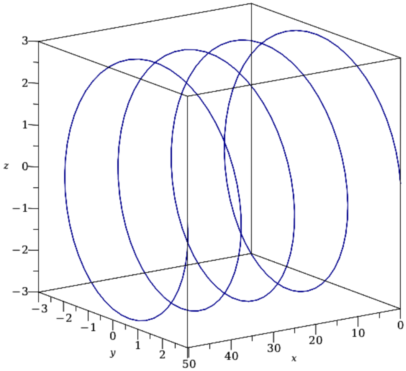
$$r(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Herunder er grafen illustreret, hvor t løber fra 0 til 4π:



Eksempel: helixen

$$r(t) = \begin{pmatrix} \lambda t \\ r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \end{pmatrix}, \quad \lambda, \omega \neq 0 \text{ og } r > 0$$



Opgaver

Arbejd med opgave 2.1 og 2.2 på side 6.

Program

Hastighed og fart for en vektorfunktion

Definition

Lad

$$r(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

være en differentiabel vektorfunktion (alle koordinatfunktionerne er differentiable). Da kaldes den afledte

$$r'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$$

for *hastighedsvektoren* tilhørende $r(t)$. Længden af $r'(t)$, $\|r'(t)\|$, kaldes *farten* til tiden t.

Eksempel: cirklen

Betragt cirklen med radius r,

$$r(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Eksempel: cirklen

Betragt cirklen med radius r,

$$r(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Da er

$$r'(t) = \begin{pmatrix} r\cos'(t) \\ r\sin'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Eksempel: cirklen

Betragt cirklen med radius r,

$$r(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Da er

$$r'(t) = \begin{pmatrix} r\cos'(t) \\ r\sin'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Farten er

$$\|r'(t)\| = \sqrt{(-r\sin(t))^2 + (r\cos(t))^2} = \sqrt{r^2} = r,$$

Regulære og singulære punkter

Definition

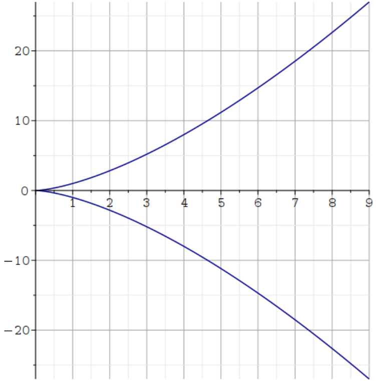
Lad r være en vektorfunktion. Hvis $r'(t_0) \neq 0$, kaldes kurven *regulær* i t_0. Hvis $r'(t_0) = 0$, kaldes kurven *singulær* i t_0. Kurven kaldes regulær, hvis den er regulær i alle punkter.

Eksempel

Betragt vektorfunktionen

$$r(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

med graf



Definition

Lad

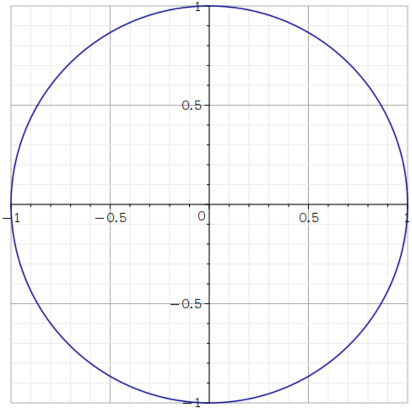
$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

være en to-dimensionel vektorfunktion. Hvis det for et punkt t_0 gælder, at $x'(t_0) = 0$, siges kurven at have en *lodret tangent* i t_0. Hvis $y'(t_0) = 0$, siges kurven at have en *vandret tangent* i t_0.

Eksempel

Betragt enhedscirklen:

$$r(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$



Opgaver

Arbejd med opgave 3.1 til 3.8 på side 8 til 10.

Opgaver

Arbejd med opgave 3.1 til 3.8 på side 8 til 10.

Hvor mange kender til integralregning?

Program

Kurvelængder

Hvordan skal vi beregne længden af en kurve givet ved $r(t)$ fra tidspunkt t_0 til t_1?

Kurvelængder

Hvordan skal vi beregne længden af en kurve givet ved $r(t)$ fra tidspunkt t_0 til t_1?

Vores intuition giver os formlen

$$l(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \|r'(t)\| dt,$$

Kurvelængder

Hvordan skal vi beregne længden af en kurve givet ved $r(t)$ fra tidspunkt t_0 til t_1?

Vores intuition giver os formlen

$$l(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \|r'(t)\| dt,$$

som vi lader være en definition:

Definition

Lad $r(t)$ være en differentiabel vektorfunktion. Da kaldes

$$l(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \|r'(t)\| dt$$

kurvelængden af kurvestykket fra t_0 til t_1.

Nogle pæne eksempler

Lad $r(t) = a + bt$ være parametriseringen af en linje i $\mathbb{R}^n$. Da er $r'(t) = b$ og $\|r'(t)\| = \|b\|$. Vi får da

$$l(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \|b\| dt = \|b\|(t_1 - t_0).$$

Nogle pæne eksempler

Lad $r(t) = a + bt$ være parametriseringen af en linje i $\mathbb{R}^n$. Da er $r'(t) = b$ og $\|r'(t)\| = \|b\|$. Vi får da

$$l(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \|b\| dt = \|b\|(t_1 - t_0).$$

Betragt nu cirklen med radius r:

$$r(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Vi har $\|r'(t)\| = r$, og dermed er

$$l(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \|r'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} r dt = r(t_1 - t_0).$$

Et mindre pænt eksempel

Betragt kurven

$$r(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 6t^2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lad os bestemme kurvelængden mellem $t_0 = -2$ og $t_1 = 2$.

Et mindre pænt eksempel

Betragt kurven

$$r(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 6t^2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lad os bestemme kurvelængden mellem $t_0 = -2$ og $t_1 = 2$. Svaret bliver

$$l(t_0, t_1) = 16\sqrt{10}.$$

Opgaver

Arbejd med opgave 4.1 til 4.5 på side 12 og 13. Alternativt kan I arbejde videre med opgaverne fra før.

De hurtige kan læse videre omkring krumningsbegrebet i afsnit 5.

Tak for denne gang

Andre arrangementer (foredrag, workshops og andet) i UNF København kan ses her: https://unf.dk/aktiviteter/?department=kbh

Information om vores sommer-sciencecamps kan ses her: https://unf.dk/sciencecamps/