Workshop i vektorfunktioner

Rasmus Frigaard Lemvig (rle@unf.dk)

Ungdommens Naturvidenskabelige Forening København

Dato: 5. december 2023

Introduktion til workshoppen

Velkommen til workshoppen i vektorfunktioner! I denne workshop starter vi ud med kort at genkalde vektorbegrebet med særligt fokus på at forstå vektorer visuelt. Herefter indfører vi vektorfunktioner og ser på en lang række eksempler. Herefter benytter vi differentialregning til at studere hastighedsvektoren og farten for en kurve. Disse gør os i stand til at studere tangenter, som fortæller os noget om kurvens form. Vi skal derefter blive komfortable med at beregne kurvelængder. Dette er det eneste i workshoppen, som forudsætter integralregning. Hvis vi får tid, eller hvis integralregning endnu er ubekendt, skal vi se nærmere på krumningsbegrebet, der fortæller, hvor meget en kurve bøjer i de forskellige punkter.

Opgaveregning er en stor del af workshoppen, da dette er den eneste måde at få begreberne rigtigt under huden. Opgaverne til workshoppen har tre sværhedsgrader indikeret med blå prikker, hvor én prik er nemmest og tre er sværest.

1 Genopfriskning af vektorer

Vi starter med at genopfriske vektorbegrebet meget kort.

Definition 1.1. En n-dimensional (reel) *vektor* er en ordnet liste

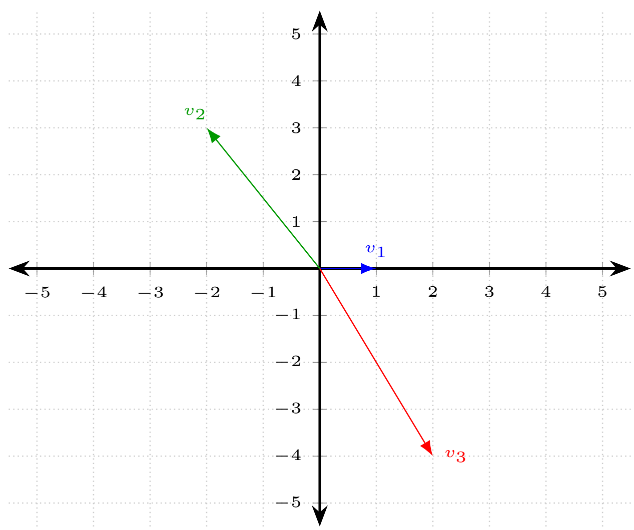
$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

hvor $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ kaldes vektorens *indgange*. Mængden af n-dimensionelle vektorer betegnes $\mathbb{R}^n$.

Eksempler på vektorer i $\mathbb{R}^2$ er

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Disse vektorer kan nemt illustreres. Den øverste koordinat indikerer, hvor langt ud af første-aksen, man skal gå, mens andenkoordinaten indikerer, hvor langt ud af andenaksen, man skal gå. Vektorer tegnes som regel med pile. F.eks. kan de tre vektorer ovenover tegnes således:



I denne workshop tænker vi på vektorer som punkter. Vektoren

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tænker vi dermed på som punktet (x, y) i planet. Vi tænker på vektorer i tre dimensioner på samme vis. Selvom en vektor er defineret som en søjle, vil vi ofte bedrive misbrug af notation og skrive $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ for en vektor.

2 Hvad er vektorfunktioner?

2.1 Definition og geometrisk tolkning af vektorfunktioner

Som navnet antyder, er en vektorfunktion en funktion, der antager vektorer som værdier.

Definition 2.1. En *vektorfunktion/parameterfremstilling* er en funktion fra $\mathbb{R}$ (eller et interval i $\mathbb{R}$) til $\mathbb{R}^n$ for et positivt heltal n, altså en funktion på formen

$$r(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Funktionerne x_i kaldes *koordinatfunktionerne* hørende til r. Inputtet t kaldes til tider for *parameteren*.

Man kan tænke på en vektorfunktion som en måde at beskrive ét-dimensionelle figurer. Ét-dimensionelle netop fordi inputtet er ét-dimensionelt (ét reelt tal). Samtidig kan vektorfunktioner beskrive nogle figurer, der ikke kan beskrives med funktioner, som I er vant til. Vi kommer til at se nogle eksempler om lidt.

Det er typisk at tænke på parameteren t som tiden og outputtet $(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ som positionen til tiden t.

2.2 Eksempler

Eksempel 2.2. Lad

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

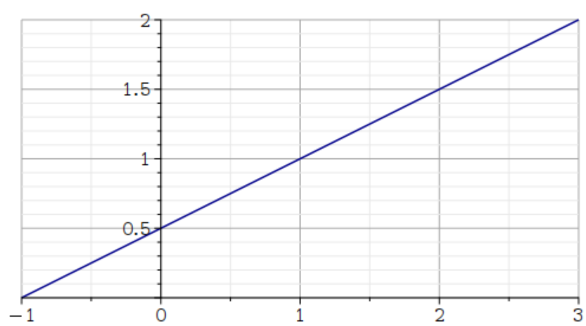
være givne vektorer i $\mathbb{R}^n$. Da beskriver vektorfunktionen

$$r(t) = a + bt = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 t \\ b_2 t \\ \vdots \\ b_n t \end{pmatrix}$$

en ret linje gennem a med retningen b. Lad os gøre det mere konkret. Betragt

$$r(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} t.$$

Denne vektorfunktion kan vi tegne således:

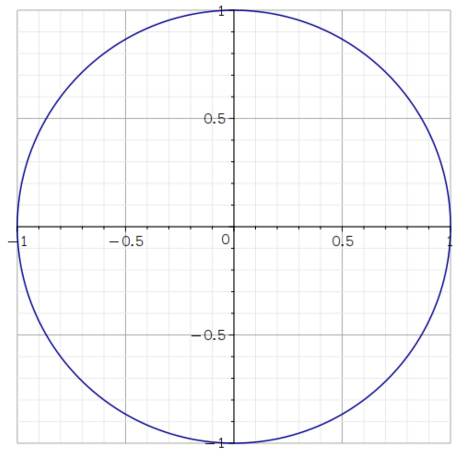


Figur 1: En ret linje.

Eksempel 2.3. Lad os nu betragte en cirkel. Det er velkendt, at vi ikke kan beskrive cirklen med en funktion, fordi vi så skulle ramme flere y-værdier med én x-værdi. Dog kan vi nemt beskrive cirklen med en vektorfunktion. Husk, at et koordinat på enhedscirklen kan skrives som $(\cos(t), \sin(t))$, hvor t løber gennem $[0, 2\pi]$. Dermed beskriver vektorfunktionen

$$r(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

enhedscirklen:



Figur 2: Enhedscirklen.

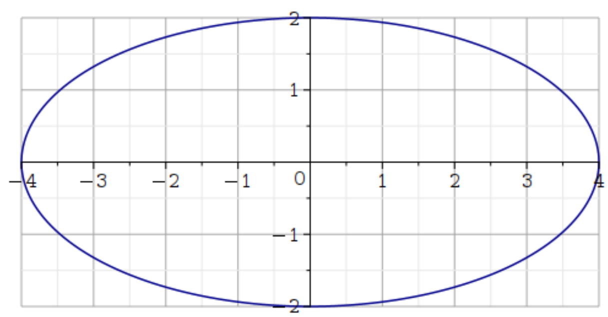
Helt generelt kan cirklen med radius r beskrives med vektorfunktionen

$$r(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Eksempel 2.4. Ligesom med en cirkel kan ellipsen beskrives med en vektorfunktion. En ellipse har parametriseringen

$$r(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$$

for nogle positive tal a og b. Ellipsen vil skære x-aksen i $-a$ og a, mens y-aksen skæres i $-b$ og b. Et eksempel med $a = 4$ og $b = 2$ ses illustreret herunder:



Figur 3: Ellipsen med $a = 4$ og $b = 2$.

Eksempel 2.5. Alle grafer for funktioner kan beskrives med en vektorfunktion. Lad f være en funktion. Da vil vektorfunktionen

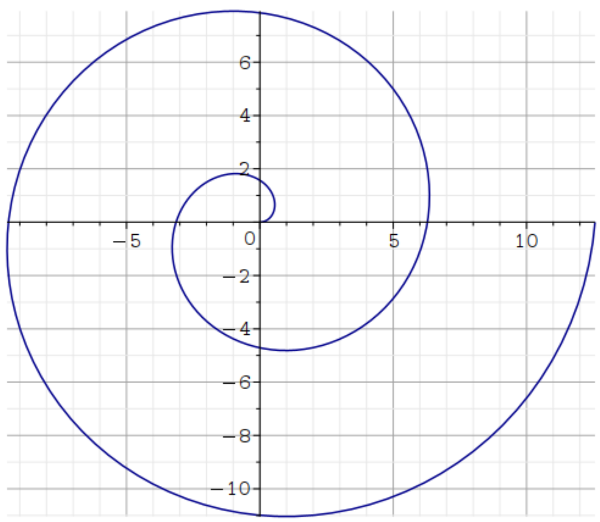
$$r(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

beskrive grafen for f.

Eksempel 2.6. Archimedes' spiral kan beskrives med vektorfunktionen

$$r(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Herunder er grafen illustreret, hvor t løber fra 0 til 4π:



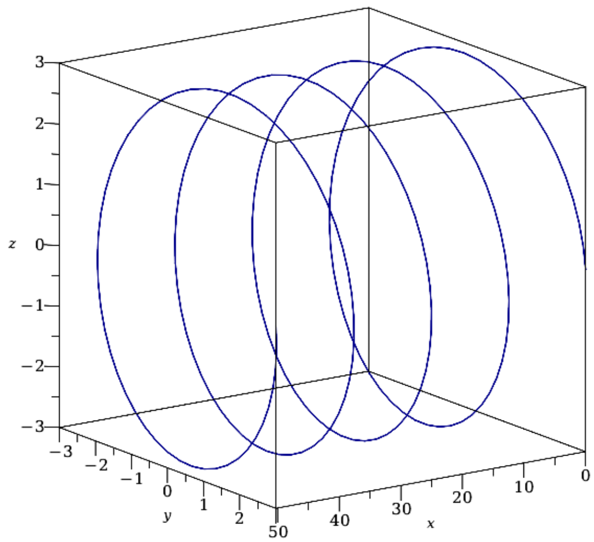
Figur 4: Archimedes' spiral.

Lad os til slut betragte et eksempel i tre dimensioner.

Eksempel 2.7. Betragt vektorfunktionen

$$r(t) = \begin{pmatrix} \lambda t \\ r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \end{pmatrix},$$

hvor λ (lille lambda) og ω (lille omega) er konstanter forskellige fra nul, mens $r > 0$ også er en konstant. Denne vektorfunktion beskriver en helix. λ angiver, hvor hurtigt spiralen bevæger sig i x-aksens retning. ω angiver vinkelhastigheden, dvs. hvor "tæt" fjederen ser ud. r er radius af cirklen. Herunder er helixen med $\lambda = 2$, $\omega = 1$ og $r = 3$ illustreret:



Figur 5: En helix.

2.3 Opgaver

• **Opgave 2.1:**
For hver af de følgende vektorfunktioner, skitsér dem i et koordinatsystem og afgør, for hvilke værdier af t de skærer x- og y-aksen.

1)

$$r(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ 3t \end{pmatrix}.$$

2)

$$r(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}.$$

3)

$$r(t) = \begin{pmatrix} 6\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix}.$$

•• **Opgave 2.2:**
Betragt Archimedes' spiral fra eksempel 2.6:

$$r(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

For hvilke t-værdier skærer kurven x-aksen? For hvilke t-værdier skærer kurven y-aksen?

3 Den afledte af en vektorfunktion

3.1 Hastighed og fart

Med en basal forståelse for vektorfunktioner på plads kan vi begynde at regne på dem.

Definition 3.1. Lad

$$r(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

være en differentiabel vektorfunktion (alle koordinatfunktionerne er differentiable). Da kaldes den afledte

$$r'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$$

for *hastighedsvektoren* tilhørende $r(t)$. Længden af $r'(t)$, $\|r'(t)\|$, kaldes *farten* til tiden t.

Som nævnt kan $r(t)$ fortolkes som positionen til tiden t. Dermed kan $r'(t)$ fortolkes som hastigheden til tiden t. Farten er længden af hastighedsvektoren og er altså ikke en vektorfunktion, men derimod en funktion i klassisk forstand.

Eksempel 3.2. Betragt cirklen med radius r,

$$r(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Da er

$$r'(t) = \begin{pmatrix} r\cos'(t) \\ r\sin'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Farten er

$$\|r'(t)\| = \sqrt{(-r\sin(t))^2 + (r\cos(t))^2} = \sqrt{r^2} = r,$$

hvor vi i en mellemregning har benyttet relationen $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$.

3.2 Tangenter

Lad os benytte differentialregning til at beskrive kurver nærmere.

Definition 3.3. Lad r være en vektorfunktion. Hvis $r'(t_0) \neq 0$, kaldes kurven *regulær* i t_0. Hvis $r'(t_0) = 0$, kaldes kurven *singulær* i t_0. Kurven kaldes regulær, hvis den er regulær i alle punkter.

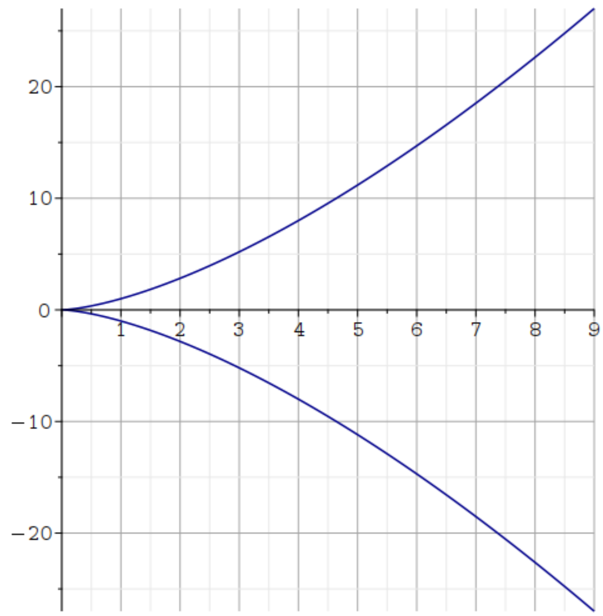
Eksempel 3.4. Betragt vektorfunktionen

$$r(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

Vi har

$$r'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}.$$

Dermed er kurven singulær i 0 og regulær for alle andre t-værdier. Dette kan også ses i grafen:



Figur 6: Kurven for $r(t) = (t^2, t^3)$.

Det ses, at grafen har et "knæk" til tidspunktet 0, hvor $r(0) = (0, 0)$. Dette kendetegner singulære punkter.

Lad os nu se på det to-dimensionelle tilfælde.

Definition 3.5. Lad

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

være en to-dimensionel vektorfunktion. Hvis det for et punkt t_0 gælder, at $x'(t_0) = 0$, siges kurven at have en *lodret tangent* i t_0. Hvis $y'(t_0) = 0$, siges kurven at have en *vandret tangent* i t_0.

Eksempel 3.6. Lad os se på enhedscirklen

$$r(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},$$

hvor

$$r'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Lad os bestemme lodrette tangenter. $-\sin(t) = 0$ hvis og kun hvis $t = \pi k$ for et heltal k. Dette svarer til punkterne $(1, 0)$ og $(-1, 0)$ på cirklen. De vandrette tangenter bestemmes ved at løse $\cos(t) = 0$. Dette er tilfældet for $t = \pi/2 + k\pi$ for et heltal k. Dette svarer til punkterne $(0, 1)$ og $(0, -1)$ på cirklen.

3.3 Opgaver

• **Opgave 3.1:**
Betragt vektorfunktionen

$$r(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Bestem hastighedsvektoren og farten af $r(t)$.

•• **Opgave 3.2:**
Bestem hastighedsvektoren og farten af Archimedes spiral

$$r(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

•• **Opgave 3.3:**
Betragt en linje $r(t) = a + bt$, hvor a og b er vektorer i $\mathbb{R}^n$. Bestem hastighedsvektoren og farten for denne vektorfunktion.

•• **Opgave 3.4:**
Betragt helixen

$$r(t) = \begin{pmatrix} \lambda t \\ r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

for $\lambda, \omega \neq 0$ og $r > 0$. Bestem hastighedsvektoren og farten af $r(t)$.

•• **Opgave 3.5:**
Vis, at kurven givet ved

$$r(t) = \begin{pmatrix} 6t^3 \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

er regulær.

•• **Opgave 3.6:**
Betragt vektorfunktionen

$$r(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

1)I hvilke punkter er kurven singulær? I hvilke er den regulær?

2)I hvilke punkter har kurven en lodret tangent?

3)I hvilke punkter har kurven en vandret tangent?

•• **Opgave 3.7:**
Vis, at kurven givet ved

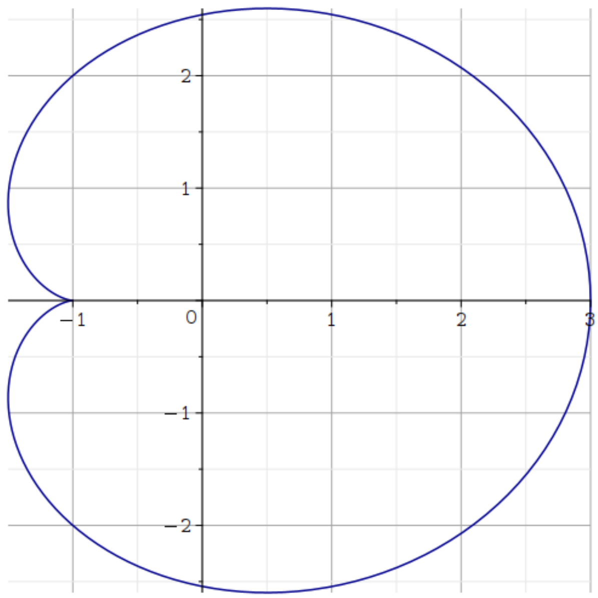
$$r(t) = \begin{pmatrix} \cos(t)\sin(t) \\ \sin(t)^2 \\ \frac{3}{4}t \end{pmatrix}$$

har konstant fart.

••• **Opgave 3.8:**
Betragt kurven givet ved vektorfunktionen

$$r(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) + \cos(2t) \\ 2\sin(t) + \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

Den resulterende kurve kaldes *kardioiden* grundet dens hjertelignende form. Kurven er tegnet ind herunder:



Figur 7: Kardioiden.

1)Ved at se på figuren, hvorhenne tror du, at kurven er singulær?

2)Bestem punkterne, hvor kurven er singulær.

3)Bestem punkterne, hvor kurven har lodrette tangenter.

4)Bestem punkterne, hvor kurven har vandrette tangenter.

4 Kurverlængder

Givet en kurve parametriseret ved en vektorfunktion $r(t)$, hvordan kan vi bestemme længden af et stykke af kurven? Hvis dt betegner et meget lille stykke tid, da er længden, kurven bevæger sig, approksimativt lig $\|r'(t)\|dt$. Summerer vi alle disse stykker op fra tidspunkt t_0 til t_1, får vi, at kurvelængden fra tidspunkt t_0 til t_1, $l(t_0, t_1)$, er lig

$$l(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \|r'(t)\| dt.$$

Dette er ikke et formelt bevis (i øvrigt kræver et bevis, at vi stringent definerer kurvelængden), men det giver en idé om, hvor ovenstående formel kommer fra. I denne workshop betragter vi ovenstående formel som en definition af kurvelængden.

Definition 4.1. Lad $r(t)$ være en differentiabel vektorfunktion. Da kaldes

$$l(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \|r'(t)\| dt$$

kurvelængden af kurvestykket fra t_0 til t_1.

Eksempel 4.2. Lad $r(t) = a + bt$ være parametriseringen af en linje i $\mathbb{R}^n$. Da er hastighedsvektoren $r'(t) = b$, og farten $\|r'(t)\| = \|b\|$. Hvad er kurvelængden fra t_0 til t_1? Per definition har vi

$$l(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \|b\| dt = \|b\|(t_1 - t_0).$$

Eksempel 4.3. Vi betragter cirklen med radius r:

$$r(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Vi har fra et tidligere eksempel, at $\|r'(t)\| = r$, og dermed er kurvelængden fra t_0 til t_1 lig

$$l(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \|r'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} r dt = r(t_1 - t_0).$$

Eksempel 4.4. Betragt kurven

$$r(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 6t^2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lad os bestemme kurvelængden mellem $t_0 = -2$ og $t_1 = 2$. Hastighedsvektoren er

$$r'(t) = \begin{pmatrix} 4t \\ 12t \\ 0 \end{pmatrix},$$

så farten er

$$\begin{aligned} \|r'(t)\| &= \sqrt{(4t)^2 + (12t)^2 + 0^2} = \sqrt{16t^2 + 144t^2} \\ &= \sqrt{(16 + 144)t^2} = \sqrt{160t^2} = |t|\sqrt{160} = 4\sqrt{10}|t|. \end{aligned}$$

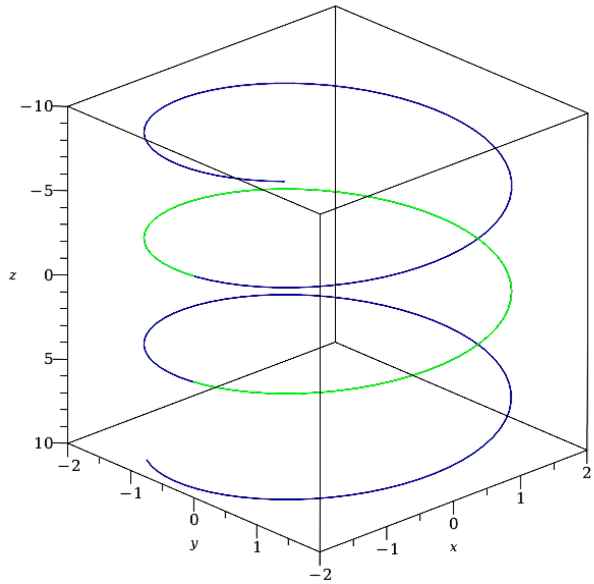
Vi kan nu bestemme kurvelængden ved at splitte integralet op i to, nemlig der hvor integrationsvariablen er negativ, og der hvor den er positiv. Vi udregner:

$$\begin{aligned} l(t_0, t_1) &= \int_{-2}^{2} 4\sqrt{10}|t| dt = 4\sqrt{10} \int_{-2}^{0} -t dt + 4\sqrt{10} \int_{0}^{2} t dt \\ &= 4\sqrt{10} \left(-\frac{1}{2}0^2 - \left(-\frac{1}{2}(-2)^2 \right) + \frac{1}{2}2^2 - \frac{1}{2}0^2 \right) \\ &= 4\sqrt{10}4 = 16\sqrt{10}. \end{aligned}$$

Eksempel 4.5. Lad

$$r(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Vi er interesseret i at bestemme kurvelængden mellem $t_0 = -\pi$ og $t_1 = \pi$. Denne del af kurven er tegnet ind med grøn i nedenstående figur af kurven:



Figur 8: Kurven i eksempel 4.5.

Som i tidligere eksempler regnes først hastighedsvektoren og farten:

$$r'(t) = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\|r'(t)\| = \sqrt{(-2\sin(t))^2 + (2\cos(t))^2 + 1^2} = \sqrt{4\sin(t)^2 + 4\cos(t)^2 + 1} = \sqrt{5}.$$

Dermed bliver kurvelængden $l(t_0, t_1) = \sqrt{5}(\pi - (-\pi)) = 2\sqrt{5}\pi$.

4.1 Opgaver

●● **Opgave 4.1:**
Betragt vektorfunktionen

$$r(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Bestem kurvelængden fra $t_0 = 0$ til $t_1 = 5$.

●● **Opgave 4.2:**
Betragt helixen

$$r(t) = \begin{pmatrix} \lambda t \\ r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Bestem kurvelængden af helixen mellem t_0 og t_1.

●● **Opgave 4.3:**
Betragt vektorfunktionen

$$r(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 3t^2 \\ 2t^3 \end{pmatrix}.$$

Vis, at $\|r'(t)\| = 3(1 + 2t^2)$ og bestem kurvelængden fra 0 til t_1.

●●● **Opgave 4.4:**
Betragt igen Archimedes' spiral:

$$r(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Bestem kurvelængden fra 0 til t_1. Du er mere end velkommen til at bruge følgende resultat:

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

●●● **Opgave 4.5:**
Betragt vektorfunktionen

$$r(t) = \begin{pmatrix} e^{ct}\cos(t) \\ e^{ct}\sin(t) \end{pmatrix},$$

hvor $c > 0$ er en konstant. Denne kurve kaldes en *logaritmisk spiral*. Bestem kurvelængden fra $-\infty$ til t_1. Dette kan fortolkes som afstanden fra origo til punktet beskrevet ved t_1.

5 Supplerende: krumning

Dette afsnit er supplerende og for de særligt interesserede. Vi vil give yderligere beskrivelser af vektorfunktioner gennem begrebet krumning. Krumningen af en kurve beskriver, hvordan kurven "bøjer" sig gennem planen/rummet.

5.1 Krumning i to dimensioner

Vi starter med en definition.

Definition 5.1. Lad

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

være en to gange differentiabel vektorfunktion. Da kaldes

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\|r'(t)\|^3}$$

krumningen af r i t.

Bemærk, at krumningen kun er defineret i punkter, hvor kurven er regulær. Specielt giver det ikke mening at tale om krumningen af en konstant kurve (men denne kurve er i forvejen højst uinteressant). Bogstavet κ er græsk og kaldes "kappa".

Eksempel 5.2. Lad $r(t) = a + bt$ være en ret linje i to dimensioner. Da $r''(t) = 0$, er $x''(t) = y''(t) = 0$, og dermed er $\kappa(t) = 0$.

Eksempel 5.3. Betragt cirklen med radius r:

$$r(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Her er

$$r'(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix}, \quad r''(t) = \begin{pmatrix} -r\cos(t) \\ -r\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Vi har fra tidligere, at $\|r'(t)\| = r$, og krumningen er da lig

$$\kappa(t) = \frac{-r\sin(t)(-r\sin(t)) - (-r\cos(t))r\cos(t)}{r^3} = \frac{r^2(\sin(t)^2 + \cos(t)^2)}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

Bemærk, at jo større radius bliver, jo mindre bliver krumningen. Dette giver intuitivt mening, eftersom kurven retter sig mere og mere ud som en ret linje omkring et punkt, som radius forøges.

Før vi kan definere krumning for tre-dimensionelle vektorfunktioner, skal vi kort gennemgå determinanter for tre gange tre-matricer og krydsprodukter.

5.2 Et kort sidespor: krydsprodukter

Definition 5.4. Givet to vektorer $v = (x_1, x_2, x_3)$ og $w = (y_1, y_2, y_3)$ i $\mathbb{R}^3$. *Krydsproduktet* af v og w defineres til vektoren

$$v \times w = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Bemærkning 5.5. Hvis læseren er bekendt med determinanten af en to gange to-matrix, da ses det, at

$$v \times w = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Dette kan til tider være en nyttig huskeregel.

Krydsproduktet kan virke mærkeligt første gang, man ser det. Det viser sig dog at have en række smarte egenskaber. Den mest nyttige er, at $v \times w$ står vinkelret på både v og w (se opgaverne).

5.3 Krumning i tre dimensioner

Definition 5.6. Lad $r(t)$ være en to gange differentiabel vektorfunktion i tre dimensioner. Da kaldes

$$\kappa(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}$$

krumningen af r i t.

Som for vektorfunktioner i to dimensioner er krumningen kun defineret i de punkter, hvor kurven er regulær.

Eksempel 5.7. Lad os beregne krumningen af kurven for vektorfunktionen

$$r(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Vi har

$$r'(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad r''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Dermed er

$$\|r'(t)\| = \sqrt{2^2 + (2t)^2 + (e^t)^2} = \sqrt{4 + 4t^2 + e^{2t}} = \sqrt{4(1 + t^2) + e^{2t}}.$$

Vi udregner krydsproduktet af $r'(t)$ og $r''(t)$:

$$r'(t) \times r''(t) = \begin{pmatrix} 2te^t - 2e^t \\ -2e^t \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(t-1)e^t \\ -2e^t \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dermed er

$$\begin{aligned} \|r'(t) \times r''(t)\| &= \sqrt{(2(t-1)e^t)^2 + (-2e^t)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{4(t-1)^2 e^{2t} + 4e^{2t} + 16} \\ &= \sqrt{4(((t-1)^2 + 1)e^{2t} + 4)} \\ &= 2\sqrt{((t-1)^2 + 1)e^{2t} + 4} \end{aligned}$$

og det endelige svar er

$$\kappa(t) = \frac{2\sqrt{((t-1)^2 + 1)e^{2t} + 4}}{(4(1 + t^2) + e^{2t})^{3/2}}.$$

Lektien fra dette eksempel er, at udregningerne og resultaterne hurtigt kan blive mindre pæne at se på.

5.4 Opgaver

• **Opgave 5.1:**
Beregn krumningen af kurven for vektorfunktionen

$$r(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

•• **Opgave 5.2:**
Beregn krumningen af kurven for vektorfunktionen

$$r(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) \end{pmatrix}.$$

• **Opgave 5.3:**
Lad v og w være tre-dimensionelle vektorer, hvor $w = cv$ for en konstant c. Vis, at $v \times w = 0$.

●● **Opgave 5.4:**
Lad v og w være tre-dimensionelle vektorer. Vis, at v og w begge er vinkelrette på $v \times w$, altså at $v \cdot (v \times w) = w \cdot (v \times w) = 0$.

●● **Opgave 5.5:**
Bestem krumningen af kurven for vektorfunktionen

$$r(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 3t^2 \\ 2t^3 \end{pmatrix}.$$

●●● **Opgave 5.6:**
Beregn krumningen for helixen givet ved

$$r(t) = \begin{pmatrix} \lambda t \\ r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

for $\lambda, \omega \neq 0$ og $r > 0$.

6 Videre læsning

For videre læsning om kurver (og flader), se [1]. Herfra er også lånt enkelte af opgaverne fra kapitel 2, 3 og 4.

[1] Henrik Schlichtkrull. *Curves and Surfaces - Lecture Notes for Geometry 1.* University of Copenhagen, 2011.