Workshop i lineær algebra

UNF København

Ungdommens Naturvidenskabelige Forening

29-09-2022

Program

Program

Mængder

Definition

En *mængde* er en samling af forskellige objekter (kaldet *elementer*). Hvis a er et element i mængden A, skriver vi $a \in A$. Hvis a ikke ligger i A, skriver vi $a \notin A$.

Mængder

Definition

En *mængde* er en samling af forskellige objekter (kaldet *elementer*). Hvis a er et element i mængden A, skriver vi $a \in A$. Hvis a ikke ligger i A, skriver vi $a \notin A$.

Eksempel

$\{1, 2, 3\}$ er en mængde med tre elementer, nemlig heltallene 1, 2 og 3. $\{a, b\}$ er en mængde med to elementer, nemlig bogstaverne a og b.

Definition

En *mængde* er en samling af forskellige objekter (kaldet *elementer*). Hvis a er et element i mængden A, skriver vi $a \in A$. Hvis a ikke ligger i A, skriver vi $a \notin A$.

Eksempel

$\{1, 2, 3\}$ er en mængde med tre elementer, nemlig heltallene 1, 2 og 3. $\{a, b\}$ er en mængde med to elementer, nemlig bogstaverne a og b.

Definition

Der findes en mængde uden nogle elementer, $\{\}$. Denne betegnes $\emptyset$ og kaldes *den tomme mængde*.

Nogle interessante (uendelige) mængder

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \quad \textit{(de naturlige tal)}$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \quad \textit{(heltallene)}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\} \quad \textit{(de rationale tal)}$$

$$\mathbb{R} = \{a, a_1 a_2 a_3 \ldots \mid a \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_i \leq 9 \text{ for alle } i\} \quad \textit{(de reelle tal)}$$

Mængdeinklusioner

Definition

Lad A og B være mængder. Hvis det for alle $a \in A$ gælder, at $a \in B$, da er A en *delmængde* af B, og vi skriver $A \subseteq B$.

Mængdeinklusioner

Definition

Lad A og B være mængder. Hvis det for alle $a \in A$ gælder, at $a \in B$, da er A en *delmængde* af B, og vi skriver $A \subseteq B$.

Eksempel

$\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$, og vi har inklusionerne $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Inklusionen $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ skyldes, at et heltal a også kan skrives som $a/1$, og $a/1$ ligger klart i $\mathbb{Q}$.

Funktioner

Definition

En *funktion/afbildning* f fra mængden A til mængden B er en sammenknytning af elementer i A til elementer i B således, at et $a \in A$ tilknyttes netop ét element $f(a) \in B$. En funktion fra A til B betegnes $f : A \to B$. A kaldes *definitionsmængden*, og B kaldes *værdimængden*.

Eksempler og ikke-eksempler

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved forskriften $f(x) = x^2$ er en funktion. Et element $x \in \mathbb{R}$ tilknyttes netop elementet x^2.

Eksempler og ikke-eksempler

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved forskriften $f(x) = x^2$ er en funktion. Et element $x \in \mathbb{R}$ tilknyttes netop elementet x^2.

(2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ givet ved $g(x) = x^2$ er *ikke* en funktion.

Eksempler og ikke-eksempler

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved forskriften $f(x) = x^2$ er en funktion. Et element $x \in \mathbb{R}$ tilknyttes netop elementet x^2.

(2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ givet ved $g(x) = x^2$ er *ikke* en funktion. F.eks. har vi $g(1/2) = 1/4$, så $1/2$ tilknyttes elementet $1/4$, men $1/4 \notin \mathbb{Z}$.

Eksempler og ikke-eksempler

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved forskriften $f(x) = x^2$ er en funktion. Et element $x \in \mathbb{R}$ tilknyttes netop elementet x^2.

(2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ givet ved $g(x) = x^2$ er *ikke* en funktion. F.eks. har vi $g(1/2) = 1/4$, så $1/2$ tilknyttes elementet $1/4$, men $1/4 \notin \mathbb{Z}$.

(3) Lad $A = \{1, 2, 3\}$ og $B = \{a, b, c\}$. Definér $h : A \to B$ ved

$$h(x) = \begin{cases} a & \text{hvis } x \text{ er et primtal} \\ b & \text{hvis } x \text{ er lige} \\ c & \text{ellers} \end{cases}$$

Eksempler og ikke-eksempler

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved forskriften $f(x) = x^2$ er en funktion. Et element $x \in \mathbb{R}$ tilknyttes netop elementet x^2.

(2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ givet ved $g(x) = x^2$ er *ikke* en funktion. F.eks. har vi $g(1/2) = 1/4$, så $1/2$ tilknyttes elementet $1/4$, men $1/4 \notin \mathbb{Z}$.

(3) Lad $A = \{1, 2, 3\}$ og $B = \{a, b, c\}$. Definér $h : A \to B$ ved

$$h(x) = \begin{cases} a & \text{hvis } x \text{ er et primtal} \\ b & \text{hvis } x \text{ er lige} \\ c & \text{ellers} \end{cases}$$

Er h en funktion?

Opgaver

Opgave 1.1 til 1.6 side 4 og 5 i kompendiet.

Program

1. Funktioner
2. Lineære ligningssystemer og matricer
3. Vektorrum

Lineære ligningssystemer

Fra gymnasiet kender vi lineære ligningssystemer med to ligninger og to ubekendte. F.eks. kan vi løse for x og y i:

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 6 \\ x + 5y &= 2. \end{aligned}$$

Dette svarer også til at finde linjernes skæringspunkt.

Lineære ligningssystemer

Fra gymnasiet kender vi lineære ligningssystemer med to ligninger og to ubekendte. F.eks. kan vi løse for x og y i:

$$
\begin{aligned}
3x - 4y &= 6 \\
x + 5y &= 2.
\end{aligned}
$$

Dette svarer også til at finde linjernes skæringspunkt.

Hvad gør vi med mange ligninger med mange ubekendte?

Lineære ligningssystemer

Lemma

Givet et lineært ligningssystem

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

med n variable (kaldet $x_1, x_2, \ldots, x_n$) og m ligninger, hvor alle koefficienter a_{ij} og b_i er reelle tal, da vil følgende operationer ikke ændre på løsningsmængden for ligningssystemet:

(1) *Ombytning af to ligninger.*

(2) *At gange en konstant $c \neq 0$ på en ligning.*

(3) *At lægge en ligning ganget med en konstant til en anden ligning.*

Matricer

Definition

En $m \times n$-matrix A er et skema af elementer fra $\mathbb{R}$ med m rækker og n søjler:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} indikerer elementet i den i'te række og j'te søjle.

Reduceret echelonform

Definition

En $m \times n$-matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

siges at være på *reduceret echelonform* hvis der eksisterer et $r \geq 0$ og indekser $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n$, sådan at:

1. For alle $1 \leq s \leq r$ gælder
$$a_{ij_s} = \begin{cases} 1, & \text{hvis } i = s \\ 0, & \text{hvis } i \neq s \end{cases}$$
2. For alle $1 \leq j < j_s$ gælder at $a_{sj} = 0$.
3. For alle $r < i \leq m$ og $1 \leq j \leq n$ gælder $a_{ij} = 0$.

Eksempler

De to matricer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

er på reduceret echelonform.

Ikke-eksempler

De to matricer

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

er ikke på reduceret echelonform. B siges dog at være på *echelonform*.

Operationer på matricer

Definition

For en matrix kan vi foretage tre typer af operationer:

(1) Ombytning af to rækker.

(2) Multiplikation af en række med en konstant forskellig fra nul.

(3) At lægge en række ganget en konstant til en anden række.

Operationer på matricer

Definition

For en matrix kan vi foretage tre typer af operationer:

(1) Ombytning af to rækker.

(2) Multiplikation af en række med en konstant forskellig fra nul.

(3) At lægge en række ganget en konstant til en anden række.

Bemærk ligheden med operationerne for ligninger!

Et eksempel

Lad os omdanne matricen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 6 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

til en matrix på reduceret echelonform med de tre operationer.

Opgaver

Tag et kig på opgave 2.1, 2.2 og 2.3 på side 12 og 13. I skal ikke nå det hele, I skal bare blive komfortable med at reducere matricer.

Totalmatricer og Gauss-elimination

Definition

Til et lineært ligningssystem

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

knytter vi *totalmatricen*

$$
(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{2m} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right)
$$

Eksempel

Til ligningssystemet

$$
\begin{aligned}
3x - 4y &= 6 \\
x + 5y &= 2
\end{aligned}
$$

Eksempel

Til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 6 \\ x + 5y &= 2 \end{aligned}$$

har vi totalmatricen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{array}\right).$$

Eksempel

Til ligningssystemet

$$
\begin{aligned}
3x - 4y &= 6 \\
x + 5y &= 2
\end{aligned}
$$

har vi totalmatricen

$$
\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{array}\right).
$$

Tricket er simpelthen bare at aflæse koefficienterne foran variablene.

Vores metode til ligningsløsning

(1) Opskriv totalmatricen for ligningssystemet.

(2) Reducér totalmatricen til en matrix på reduceret echelonform.

(3) Aflæs ligningssystemet for den reducerede matrix for at se løsningen.

Vores metode til ligningsløsning

(1) Opskriv totalmatricen for ligningssystemet.
(2) Reducér totalmatricen til en matrix på reduceret echelonform.
(3) Aflæs ligningssystemet for den reducerede matrix for at se løsningen.

Vi tager nogle eksempler på denne procedure.

Eksempel 1 (netop én løsning)

Vi tager det nu genkendelige eksempel

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 6 \\ x + 5y &= 2. \end{aligned}$$

Eksempel 2 (ingen løsninger)

Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 4x + 8y &= 11. \end{aligned}$$

Eksempel 2 (ingen løsninger)

Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 4x + 8y &= 11. \end{aligned}$$

Totalmatricen for systemet er

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 11 \end{array}\right).$$

Eksempel 3 (uendeligt mange løsninger)

Betragt ligningssystemet

$$
\begin{aligned}
2x + y + 7z - 3w &= 0\\
5x - y + 4z + 4z &= -6\\
7x + 11z + w &= -6.
\end{aligned}
$$

Dette ligningssystem har totalmatricen:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & 1 & 7 & -3 & 0\\
5 & -1 & 4 & 4 & -6\\
7 & 0 & 11 & 1 & -6
\end{array}\right)
$$

Eksempel 3 (uendeligt mange løsninger)

Betragt ligningssystemet

$$
\begin{aligned}
2x + y + 7z - 3w &= 0 \\
5x - y + 4z + 4z &= -6 \\
7x + 11z + w &= -6.
\end{aligned}
$$

Dette ligningssystem har totalmatricen:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & 1 & 7 & -3 & 0 \\
5 & -1 & 4 & 4 & -6 \\
7 & 0 & 11 & 1 & -6
\end{array}\right)
\longrightarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & \frac{11}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{6}{7} \\
0 & 1 & \frac{27}{7} & -\frac{23}{7} & \frac{12}{7} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

Opgaver

Opgave 2.4 - 2.15 i kompendiet på side 13 til 15.

Definition

En *addition* på en mængde V er en funktion $+ : V \times V \to V$. En (reel) skalar-multiplikation på V er en funktion $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$. I stedet for at skrive $+(v, w)$ skriver vi $v + w$, og i stedet for $\cdot(a, v)$ skriver vi $a \cdot v$.

Program

Addition og skalarmultiplikation

Definition

En *addition* på en mængde V er en funktion $+ : V \times V \to V$. En (reel) skalar-multiplikation på V er en funktion $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$. I stedet for at skrive $+(v, w)$ skriver vi $v + w$, og i stedet for $\cdot(a, v)$ skriver vi $a \cdot v$.

Addition og skalarmultiplikation

Definition

En *addition* på en mængde V er en funktion $+ : V \times V \to V$. En (reel) skalar-multiplikation på V er en funktion $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$. I stedet for at skrive $+(v, w)$ skriver vi $v + w$, og i stedet for $\cdot(a, v)$ skriver vi $a \cdot v$.

Eksempel

Den sædvanlige addition på $\mathbb{R}$ er en reel addition. F.eks. er $3 + 7 = 10$. Ligeledes er den sædvanlige multiplikation en reel skalar-multiplikation. F.eks. er $3 \cdot 7 = 21$.

Addition og skalarmultiplikation

Definition

En *addition* på en mængde V er en funktion $+ : V \times V \to V$. En (reel) skalar-multiplikation på V er en funktion $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$. I stedet for at skrive $+(v, w)$ skriver vi $v + w$, og i stedet for $\cdot(a, v)$ skriver vi $a \cdot v$.

Eksempel

Den sædvanlige addition på $\mathbb{R}$ er en reel addition. F.eks. er $3 + 7 = 10$. Ligeledes er den sædvanlige multiplikation en reel skalar-multiplikation. F.eks. er $3 \cdot 7 = 21$.

Bemærkning

Ofte udelader vi gangetegnet $\cdot$, hvis det er implicit, at det skal være det. Hvis f.eks. $a, b \in \mathbb{R}$ er to reelle tal, skriver vi som regel bare ab for $a \cdot b$.

Vektorrum

Definition

Et reelt vektorrum V er en mængde med en addition $+$ og en reel multiplikation $\cdot$, så følgende regler gælder:

1. $u + v = v + u$ for alle $u, v \in V$ (den *kommutative* egenskab for addition).
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$ for alle $u, v, w \in V$ (den *associative* egenskab for addition).
3. Der eksisterer et element $0 \in V$, så $v + 0 = v$ for alle $v \in V$ (eksistens af *additivt neutralelement*).
4. For alle $u \in V$ findes et $v \in V$ så $u + v = 0$ (eksistens af en *additiv invers*).
5. For alle $u \in V$ og $a, b \in \mathbb{R}$ gælder $a(bu) = (ab)u$ (den *associative* egenskab for multiplikation).
6. For alle $v \in V$ gælder $1v = v$ (*multiplikativ identitet*).
7. For alle $a, b \in \mathbb{R}$ og $u, v \in V$ gælder $a(u + v) = au + av$ og $(a + b)u = au + bu$ (de *distributive egenskaber*).

Eksempler på vektorrum

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n$ er blandt de vigtigste eksempler på reelle vektorrum.

Eksempler på vektorrum

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n$ er blandt de vigtigste eksempler på reelle vektorrum.

Andre interessante eksempler er $\mathbb{R}[x]$ og $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Egenskaber for vektorrum

Proposition

Lad V være et reelt vektorrum. Det additive neutralelement 0 er unikt.

Egenskaber for vektorrum

Proposition

Lad V være et reelt vektorrum. Det additive neutralelement 0 er unikt.

Proposition

Lad V være et reelt vektorrum. For alle $u \in V$ er det additive invers-element unikt.

Egenskaber for vektorrum

Proposition

Lad V være et reelt vektorrum. Det additive neutralelement 0 er unikt.

Proposition

Lad V være et reelt vektorrum. For alle $u \in V$ er det additive invers-element unikt.

Det giver derfor mening at skrive $-v$ for den additive inverse for v.

Egenskaber for vektorrum

Proposition

For alle reelle vektorrum V gælder $0v = 0$ for alle $v \in V$ (hvor 0 på venstresiden skal forstås som tallet 0, mens 0 på højresiden af lighedstegnet er $0 \in V$).

Egenskaber for vektorrum

Proposition

For alle reelle vektorrum V gælder $0v = 0$ for alle $v \in V$ (hvor 0 på venstresiden skal forstås som tallet 0, mens 0 på højresiden af lighedstegnet er $0 \in V$).

Proposition

Lad V være et reelt vektorrum. For alle $v \in V$ gælder $(-1)v = -v$.

Opgaver

Opgave 3.1 - 3.9 på side 18.