Workshop i lineær algebra

Rasmus Frigaard Lemvig - rle@unf.dk

Ungdommens Naturvidenskabelige Forening KBH

Dato: 29-09-2022

Introduktion til workshoppen

I denne workshop skal vi arbejde med en af de nyttigste grene af matematikken, lineær algebra. Workshoppen består af tre dele: i første del formaliserer vi begrebet ”funktion” som det er kendt fra grundskolen og gymnasiet. I anden del skal vi udvikle en effektiv metode til at løse lineære ligningssystemer i flere variable. For at gøre dette skal vi introducere matricer, som er et smart begreb at kende til. Til slut skal vi arbejde med noget mere teoretisk, nemlig vektorrum. Opgaverne i materialet er inddelt i tre sværhedsgrader, nemlig let, mellem og svær, som er indikeret med hhv. én, to og tre prikker.

1 Funktioner

Inden vi kaster os ud i lineær algebra, skal vi have styr på, hvad en funktion formelt er. Fra gymnasiet og grundskolen er vi vant til kun at skrive f.eks. $f(x) = x^2$. Men det er faktisk ikke formelt nok. For hvad er x? Her er det ofte implicit, at x er et reelt tal, f.eks. kunne $x = 2$, og da er $f(x) = 4$. I dette afsnit skal vi kort se på mængder og derefter på en formel definition af funktioner.

Definition 1.1. En *mængde* er en samling af forskellige objekter (kaldet *elementer*). Hvis a er et element i mængden A, skriver vi $a \in A$. Hvis a ikke ligger i A, skriver vi $a \notin A$.

Vi betegner mængder med tuborgklammer og med elementerne adskilt af kommaer.

Eksempel 1.2. $\{1, 2, 3\}$ er en mængde med tre elementer, nemlig heltallene 1, 2 og 3. $\{a, b\}$ er en mængde med to elementer, nemlig bogstaverne a og b.

Definition 1.3. Der findes en mængde uden nogle elementer, $\{\}$. Denne betegnes $\emptyset$ og kaldes *den tomme mængde*.

Eksempel 1.4. Mange interessante mængder har uendeligt mange elementer. F.eks. er:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\} \quad \textit{(de naturlige tal)} \\
&\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\} \quad \textit{(heltallene)} \\
&\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\} \quad \textit{(de rationale tal)} \\
&\mathbb{R} = \{a, a_1a_2a_3... \mid a \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_i \leq 9 \text{ for alle } i\} \quad \textit{(de reelle tal)}
\end{aligned}$$

De mest kendte talmængder. $\mathbb{N}$ og $\mathbb{Z}$ siger sig selv. $\mathbb{Q}$ er blot mængden af alle heltalsbrøker, f.eks. $1/3, 2/5, -1/4$ osv. $\mathbb{R}$ er alle decimaltal. En brøk er et decimaltal, så $\mathbb{R}$ indeholder $\mathbb{Q}$, men ikke alle reelle tal er rationale. F.eks. kan man vise, at $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Definition 1.5. Lad A og B være mængder. Hvis det for alle $a \in A$ gælder, at $a \in B$, da er A en *delmængde* af B, og vi skriver $A \subseteq B$.

Eksempel 1.6. $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$, og vi har inklusionerne $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Inklusionen $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ skyldes, at et heltal a også kan skrives som $a/1$, og $a/1$ ligger klart i $\mathbb{Q}$.

Vi er nu klar til at definere funktioner.

Definition 1.7. En *funktion/afbildning* f fra mængden A til mængden B er en sammenknytning af elementer i A til elementer i B således, at et $a \in A$ tilknyttes netop ét element $f(a) \in B$. En funktion fra A til B betegnes $f : A \to B$. A kaldes *definitionsmængden*, og B kaldes *værdimængden*.

Eksempel 1.8. Lad os se på nogle eksempler og ikke-eksempler på funktioner.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved forskriften $f(x) = x^2$ er en funktion. Et element $x \in \mathbb{R}$ tilknyttes netop elementet x^2.

(2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ givet ved $g(x) = x^2$ er *ikke* en funktion. F.eks. har vi $g(1/2) = 1/4$, så $1/2$ tilknyttes elementet $1/4$, men $1/4 \notin \mathbb{Z}$.

(3) Lad $A = \{1, 2, 3\}$ og $B = \{a, b, c\}$. Definér $h : A \to B$ ved

$$h(x) = \begin{cases} a & \text{hvis } x \text{ er et primtal} \\ b & \text{hvis } x \text{ er lige} \\ c & \text{ellers} \end{cases}$$

Vi ser, at alle elementer i A tilknyttes et element i B. Dog er h alligevel ikke en funktion. 2 er både et primtal og et lige tal. Dvs. $h(2)$ tilknyttes både a og b, hvilket ikke er tilladt for en funktion.

I denne workshop skal vi bl.a. undersøge såkaldte *lineære afbildninger*, der er funktioner med en bestemt egenskab. Specielt vil vi se på funktioner fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$, så disse størrelser skal vi have defineret.

Definition 1.9. Lad A og B være mængder. *Produktmængden/det kartesiske produkt* af A og B er mængden $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. Her betegner (a, b) et såkaldt *ordnet par* af elementer. (a, b) er en samling af elementerne a og b, hvor rækkefølgen betyder noget, så $(a, b) \neq (b, a)$ for $a \neq b$.

Definitionen ovenover er abstrakt, men konceptet er velkendt. Man kan tænke på (a, b) som punktet med koordinater a og b. Definitionen udvides nemt til større produkter af flere mængder. F.eks. er $A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$.

Eksempel 1.10. Lad os se på nogle eksempler på produktmængder.

(1) Lad $A = \{a, b, c\}$ og $B = \{1, 2\}$. Da er $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$. Man kan også visualisere produktmængden som et skema:

	a	b	c
1	$(a, 1)$	$(b, 1)$	$(c, 1)$
2	$(a, 2)$	$(b, 2)$	$(c, 2)$

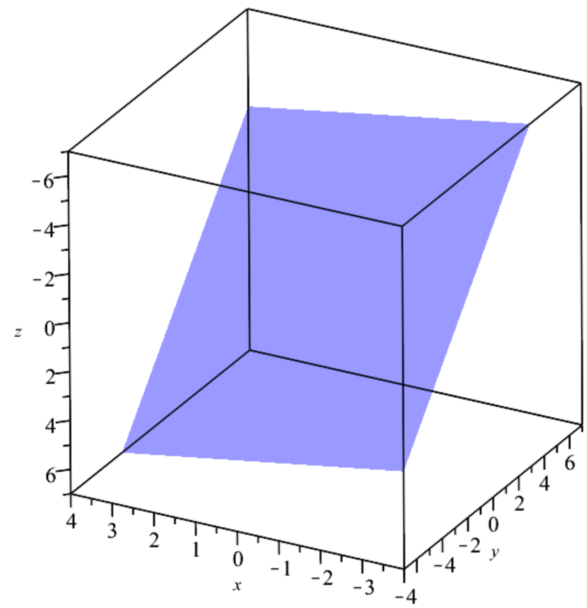
(2) Betragt mængden $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Denne mængde består per definition af alle par (a, b), hvor a og b er reelle tal. Vi ser, at $\mathbb{R}^2$ blot er planet, og elementerne (a, b) blot er alle punkter i planet. På samme måde er $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ lig rummet, og elementerne (a, b, c) er punkter i rummet.

Lad os til slut se på en type funktion, vi kommer til at se en del af i workshoppen.

Eksempel 1.11. Lad os se på $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ givet ved

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x + y \\ x - y \end{pmatrix}$$

Denne funktion tilknytter punktet (x, y) i planet til punktet $(2x, x + y, x - y)$ i rummet. Billedet af f, dvs. mængden af punkter, som f rammer i $\mathbb{R}^3$, er en flade. Den ser sådan ud:



1.1 Opgaver

- **Opgave 1.1:**
  Afgør, om følgende udsagn er sande eller falske:

  (i) $-2 \in \mathbb{N}$.

  (ii) $a \in \{a, b, c\}$.

  (iii) $\{a\} \in \{a, b\}$.

  (iv) $\{2, 1/3, -7\} \subseteq \mathbb{R}$.

  (v) $\{b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$.

  (vi) $9/10 \notin \mathbb{N}$.

  (vii) $a \in \{\{a\}, \{b\}\}$.

- **Opgave 1.2:**
  Hvilke af følgende er funktioner?

  (i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = 2x + 1$.

  (ii) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ givet ved $g(x) = x$.

  (iii) Lad $A = \{1, 2, 3\}$ og $B = \{a, b\}$. $h : A \to B$ givet ved $h(x) = a$ for alle $x \in A$.

  (iv) $k : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ givet ved $k(a, b) = a/b$.

De resterende opgaver introducerer operationer, vi kan lave på mængder.

Opgave 1.3: Foreningsmængden
Givet mængder A og B, er *foreningsmængden* af A og B lig de elementer, der ligger i enten A eller i B (eller i begge). F.eks. er $\{1,2,5,6\} \cup \{2,3,4,5\} = \{1,2,3,4,5,6\}$. Udregn $A \cup B$ for:

1) $A = \{a, b\}$ og $B = \{c, d\}$.

2) $A = \mathbb{N}$ og $B = \mathbb{Z}$.

3) $A = \{1/2, 1/3, 1/4\}$ og $B = \{2, 3, 4\}$.

Opgave 1.4:
Vi arbejder videre med foreningsmængden fra forrige opgave. Lad A være en vilkårlig mængde. Argumentér for, at:

1) $A \cup A = A$.

2) $A \cup \emptyset = A$.

3) $A \cup B = B$ hvis $A \subseteq B$.

Opgave 1.5:
Givet mængder A og B er *fællesmængden/snittet* af A og B lig de elementer, der ligger i *både* A og B. F.eks. er $\{1,2,5,6\} \cap \{2,3,4,5\} = \{2,5\}$. Udregn $A \cap B$ for:

1) $A = \{a, b\}$ og $B = \{c, d\}$.

2) $A = \mathbb{N}$ og $B = \mathbb{Z}$.

3) $A = \{1, 2, 3\}$ og $B = \{2, 3, 4\}$.

Opgave 1.6:
Vi arbejder videre med fællesmængden fra forrige opgave. Lad A være en vilkårlig mængde. Argumentér for, at:

1) $A \cap A = A$.

2) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

3) $A \cap B = A$ hvis $A \subseteq B$.

Hvis mængder A og B opfylder $A \cap B = \emptyset$, kaldes A og B *disjunkte*.

2 Lineære ligningssystemer og matricer

2.1 Lineære ligningssystemer

Nu kan vi begynde at arbejde med nogle problemstillinger i lineær algebra. Fra grundskolen og gymnasiet er vi vant til at løse to ligninger med to ubekendte. F.eks. kunne vi have ligningssystemet

$$3x - 4y = 6$$
$$x + 5y = 2,$$

og vi er interesseret i at finde alle de reelle tal x og y, som løser ligningssystemet. Den klassiske metode er at først isolere den ene variabel, f.eks. x, i en af ligningerne:

$$x + 5y = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 2 - 5y$$

Herefter kan vi indsætte dette udtryk for x i den øverste ligning:

$$3x - 4y = 6 \quad \Rightarrow \quad 3(2-5y) - 4y = 6 \quad \Rightarrow \quad 6 - 15y - 4y = 6 \quad \Rightarrow \quad -19y = 0$$

Altså fås, at $y = 0$. Vi ser fra udtrykket $x = 2 - 5y$, at $x = 2$. Den eneste løsning til ligningssystemet er da $(x, y) = (2, 0)$. Formålet med dette afsnit er at indføre en mere praktisk metode til at løse denne slags ligningssystemer. Dette tillader os samtidig at løse lineære ligningssystemer med mange ligninger og ubekendte.

Inden vi kan indføre den nye metode, skal vi have nogle teknikker på plads til at løse lineære ligningssystemer. Fra nu af antages alle koefficienter og konstanter at være reelle tal.

Lemma 2.1. *Givet et lineært ligningssystem*

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\vdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}$$

med n variable (kaldet $x_1, x_2, ..., x_n$) og m ligninger, hvor alle koefficienter a_{ij} og b_i er reelle tal, da vil følgende operationer ikke ændre på løsningsmængden for ligningssystemet:

(1) Ombytning af to ligninger.

(2) At gange en konstant $c \neq 0$ på en ligning.

(3) At lægge en ligning ganget med en konstant til en anden ligning.

Bevis: Det er klart, at (1) ikke ændrer løsningsmængden, thi rækkefølgen af ligningerne ikke betyder noget for løsningsmængden. Lad $c \neq 0$ være en konstant. Lad os tage ligning i og gange med c:

$$c(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{i_n}x_n) = cb_i$$

Hvis $(x_1, ..., x_n)$ løser den oprindelige ligning, ses det, at $(x_1, ..., x_n)$ også vil løse den nye ligning. Omvendt, hvis $(x_1, ..., x_n)$ løser ligningen ganget igennem med c, da kan vi gange med c^{-1} på begge sider af lighedstegnet (fordi $c \neq 0$) og få den oprindelige ligning tilbage, og dermed ser vi, at $(x_1, ..., x_n)$ også løser den oprindelige ligning. Altså ændrer operation 2 heller ikke løsningsmængden. Lad os nu se på operation 3. Lad A_i betegne ligning i og A_j ligning j. Ser vi på ligningen $A_i + cA_j$, kan vi få den oprindelige ligning tilbage ved blot at trække cA_j fra $A_i + cA_j$. Dermed ses på samme måde som med operation 2, at løsningsmængden forbliver uændret. ■

Bemærkning 2.2. Operationerne ovenover har den egenskab, at man altid kan gå et skridt tilbage og altså ændre ligningssystemet tilbage til det, man startede med. Derfor tillader vi ikke at gange igennem med 0, da vi ikke har nogen mulighed for at sige, hvad den oprindelige ligning var før.

Eksempel 2.3. Lad os som eksempel se på ligningssystemet

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 6 \\ x + 5y &= 2 \end{aligned}$$

fra før. Vi kan gange den nederste ligning med 3:

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 6 \\ 3x + 15y &= 6 \end{aligned}$$

Vi kan nu trække den øverste ligning fra den nederste (det samme som at lægge -1 gange den øverste ligning til den nederste):

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 6 \\ 19y &= 0 \end{aligned}$$

Dividerer vi den nederste ligning med 19 (det samme som at gange med $1/19$) får vi

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 6 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Lad os lægge 4 gange den nederste ligning til den øverste:

$$\begin{aligned} 3x &= 6 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Dividerer vi den øverste ligning med 3 får vi:

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

2.2 Matricer

Vi bemærker en vigtig ting omkring lineære ligningssystemer. Vi behøver faktisk ikke at opskrive alle variablene $x_1, ..., x_n$ for at angive systemet. Vi behøver kun at kende koefficienterne a_{ij} og b_i. For at kunne benytte denne observation, skal vi have en definition på plads:

Definition 2.4. En $m \times n$-matrix A er et skema af elementer fra $\mathbb{R}$ med m rækker og n søjler:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} indikerer elementet i den i'te række og j'te søjle.

Eksempel 2.5. I 4×3-matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 14 & -3 & 0 \\ -2 & -11 & 6 \end{pmatrix}$$

er $a_{23} = 0$ indgangen i anden række og tredje søjle. Vi har også $a_{12} = 8$ og $a_{43} = 6$.

Matricer viser sig at være smarte, når vi skal løse ligningssystemer. I den henseende er det smart at betragte en særlig pæn type matrix.

Definition 2.6. En $m \times n$-matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

siges at være på *reduceret echelonform* hvis der eksisterer et $r \geq 0$ og indekser $1 \leq j_1 < ... < j_r \leq n$, sådan at:

1. For alle $1 \leq s \leq r$ gælder
$$a_{ij_s} = \begin{cases} 1, & \text{hvis } i = s \\ 0, & \text{hvis } i \neq s \end{cases}$$

2. For alle $1 \leq j < j_s$ gælder at $a_{sj} = 0$.

3. For alle $r < i \leq m$ og $1 \leq j \leq n$ gælder $a_{ij} = 0$.

Hvad står der i ovenstående definition? Der står, at en matrix A er på reduceret echelonform, hvis de første rækker alle indledes med et 1-tal, hvor der står nuller over og under disse. Derudover skal matricen have en særlig trappeform. Nogle eksempler illustrerer konceptet.

Eksempel 2.7. De to matricer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

er på reduceret echelonform.

Eksempel 2.8. De to matricer

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

er ikke på reduceret echelonform. B siges dog at være på *echelonform*.

Resten af denne sektion går ud på at introducere en metode til at omdanne enhver matrix til en matrix på reduceret echelonform.

Definition 2.9. For en matrix kan vi foretage tre typer af operationer:

(1) Ombytning af to rækker.

(2) Multiplikation af en række med en konstant forskellig fra nul.

(3) At lægge en række ganget en konstant til en anden række.

Bemærk ligheden med de tre operationer introduceret for ligningssystemer! Med disse tre operationer kan vi omdanne en matrix til en på reduceret echelonform. Vi gennemgår et eksempel:

Eksempel 2.10. Lad

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 6 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Først tager vi række et og lægger den til række tre:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 6 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 6 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Dernæst tager vi række et, ganger den med -2 og lægger den til række to:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 6 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Vi ganger række to igennem med $-\frac{1}{7}$ og række tre igennem med $-\frac{1}{3}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Vi lægger række to gange -1 til række tre og række to gange -2 til række et:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2+\frac{8}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{7} \end{pmatrix}$$

Vi ganger række et med en tredjedel og række tre med $-\frac{3}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2+\frac{8}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{7} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}+\frac{8}{21} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{33}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{33}{14} \end{pmatrix}$$

Hermed er vores matrix omskrevet til en matrix på reduceret echelonform.

2.3 Løsning af ligningssystemer

Definition 2.11. Til et lineært ligningssystem

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\vdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}$$

knytter vi *totalmatricen*

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{2m} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

hvor det er indforstået, at

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{2m} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Eksempel 2.12. Til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 6 \\ x + 5y &= 2 \end{aligned}$$

har vi totalmatricen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{array}\right).$$

Tricket er simpelthen bare at aflæse koefficienterne foran variablene.

Vi er nu klar til at kombinere vores viden om matricer på reduceret echelonform og totalmatricer for ligningssystemer til at lave en smart metode til ligningsløsning. Opskrevet i trin fungerer den således:

(1) Opskriv totalmatricen for ligningssystemet.

(2) Reducér totalmatricen til en matrix på reduceret echelonform.

(3) Aflæs ligningssystemet for den reducerede matrix for at se løsningen.

Vi tager nogle eksempler på denne procedure.

Eksempel 2.13. Vi betrager atter ligningssystemet

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 6 \\ x + 5y &= 2. \end{aligned}$$

Vi aflæste totalmatricen til at være

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{array}\right).$$

Vi reducerer denne matrix til en matrix på reduceret echelonform. Først lægger vi -3 gange række to til række et:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -19 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

Da kan vi gange række et med $-\frac{1}{19}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -19 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

Vi lægger -5 gange række et til række to:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Til slut kan vi ombytte de to rækker:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Dette er en matrix på reduceret echelonform, og det tilsvarende ligningssystem er:

$$1x + 0y = 2$$
$$0x + 1y = 0$$

som trivielt har den unikke løsning $x = 2$ og $y = 0$.

Det er ikke nødvendigvis sandt, at et ligningssystem har en løsning. Eller at en eventuel løsning er unik. Vi tager et eksempel på hver af de to tilfælde herunder:

Eksempel 2.14. Betragt ligningssystemet

$$x + 2y = 3$$
$$4x + 8y = 11.$$

Totalmatricen for systemet er

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 11 \end{array}\right).$$

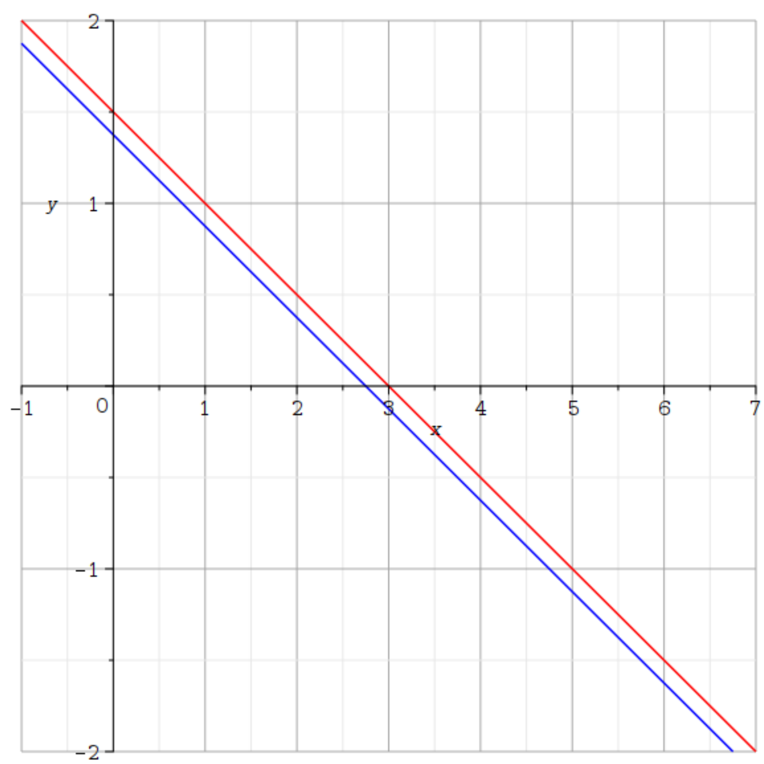
Lad os reducere denne matrix. Læg -4 gange række et til række to:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 11 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Læg tre gange række to til række 1 og gang række to med -1:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Men hvilket ligningssystem er dette? Den nederste ligning siger $0 = 1$. Dette er noget våS! Ergo kan det oprindelige ligningssystem ingen løsning have. Hvis du ikke er overbevist af denne nye metode, kan du prøve at løse ligningerne på klassisk vis og se, at det går galt. Man kan også se det geometrisk. De to ligninger udgør parallele linjer i planet, og parallelle linjer skærer ikke, så der findes ingen løsninger. Se figuren herunder:



Eksempel 2.15. Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x + y + 7z - 3w &= 0 \\ 5x - y + 4z + 4z &= -6 \\ 7x + 11z + w &= -6, \end{aligned}$$

som har totalmatrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 7 & -3 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 4 & -6 \\ 7 & 0 & 11 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

Omdanner man denne matrix til reduceret echelonform fås matricen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{11}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & 1 & \frac{27}{7} & -\frac{23}{7} & \frac{12}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

som har tilhørende ligningssystem

$$\begin{aligned} x + \frac{11}{7}z + \frac{1}{7}w &= -\frac{6}{7} \\ y + \frac{27}{7}z - \frac{23}{7}w &= \frac{12}{7}. \end{aligned}$$

Hvordan opskriver vi løsningerne hertil? Vi har flere ligninger end variable, så der kommer til at være uendelig mange løsninger. Disse løsninger kan parametriseres som følger. Vi har fire variable og to ligninger. Dermed skal der bruges to parametre. Lad os vælge $z = t$ og $w = s$ som vores to parametre. Isolerer vi x og y i ligningerne, får vi:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{11}{7}t - \frac{1}{7}s - \frac{6}{7} \\ y &= -\frac{27}{7}t + \frac{23}{7}s + \frac{12}{7}. \end{aligned}$$

hvor $t, s \in \mathbb{R}$. Dvs. alle løsninger til ligningssystemet er vektorer på formen

$$(x, y, z, w) = \left(-\frac{11}{7}t - \frac{1}{7}s - \frac{6}{7}, -\frac{27}{7}t + \frac{23}{7}s + \frac{12}{7}, t, s\right), \quad \text{hvor} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

2.4 Opgaver

- **Opgave 2.1:**
Omskriv følgende matricer til matricer på reduceret echelonform:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -6 & 14 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -11 & 0 \end{pmatrix}$$

•• **Opgave 2.2:**
Omskriv følgende matricer til matricer på reduceret echelonform:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 4 & 2 & 10 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 14 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 14 \\ 2 & 10 & 21 \end{pmatrix}$$

- ●● **Opgave 2.3:**
  Omskriv følgende matrix til en matrix på reduceret echelonform:

$$\begin{pmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -5 \\ 4 & -3 & 11 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Opgave 2.4:**
  Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 5 \\ 4x - 3y &= 0 \end{aligned}$$

1)Opskriv totalmatricen for ligningssystemet.

2)Reducér totalmatricen, så den kommer på reduceret echelonform.

3)Opskriv løsningerne til ligningssystemet, eller argumentér for, at de ikke findes.

- **Opgave 2.5:**
  Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 5 \\ 15x + 9y &= 0 \end{aligned}$$

1)Opskriv totalmatricen for ligningssystemet.

2)Reducér totalmatricen, så den kommer på reduceret echelonform.

3)Opskriv løsningerne til ligningssystemet, eller argumentér for, at de ikke findes.

- **Opgave 2.6:**
  Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} -x + 9y &= -13 \\ 2x - 3y &= 8 \end{aligned}$$

1)Opskriv totalmatricen for ligningssystemet.

2)Reducér totalmatricen, så den kommer på reduceret echelonform.

3)Opskriv løsningerne til ligningssystemet, eller argumentér for, at de ikke findes.

- **Opgave 2.7:**
  Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 5 \\ 15x + 6y &= 15 \end{aligned}$$

1)Opskriv totalmatricen for ligningssystemet.

2)Reducér totalmatricen, så den kommer på reduceret echelonform.

3)Opskriv løsningerne til ligningssystemet, eller argumentér for, at de ikke findes.

●●● **Opgave 2.8:**
Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}$$

hvor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Vis, at $(x, y) = (0, 0)$ er den eneste løsning til ligningssystemet hvis og kun hvis $ad - bc \neq 0$. Tallet $ad - bc$ kaldes for *determinanten* af matricen givet ved

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

●● **Opgave 2.9:**
Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 0 \\ -2x - 4y + 6z &= 0 \\ 5y + 10z &= 0 \end{aligned}$$

1)Opskriv totalmatricen for ligningssystemt

2)Reducér totalmatricen til en matrix på reduceret echelonform.

3)Løs ligningssystemet.

●● **Opgave 2.10:**
Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x + 14y + 14z &= 0 \\ -2x - 4y + 6z &= 0 \\ 5y + 10z &= 0 \end{aligned}$$

1)Opskriv totalmatricen for ligningssystemt

2)Reducér totalmatricen til en matrix på reduceret echelonform.

3)Løs ligningssystemet.

●● **Opgave 2.11:**
Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} -5x + y + 3z &= 0 \\ -15x - 5y + 20z &= 0 \\ 5x + 10z &= 0 \end{aligned}$$

1)Opskriv totalmatricen for ligningssystemt

2)Reducér totalmatricen til en matrix på reduceret echelonform.

3)Løs ligningssystemet.

●● **Opgave 2.12:**
Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y + 3z + w &= 0 \\ -2x - 4y + 6z - 3w &= 0 \\ x + 2z &= 0 \end{aligned}$$

1)Opskriv totalmatricen for ligningssystemt

2)Reducér totalmatricen til en matrix på reduceret echelonform.

3)Løs ligningssystemet.

●● **Opgave 2.13:**

Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} 6x + 3y + 15z &= 0 \\ -2x - 4z &= 0 \\ x + 2z &= 2 \end{aligned}$$

1)Opskriv totalmatricen for ligningssystemt

2)Reducér totalmatricen til en matrix på reduceret echelonform.

3)Løs ligningssystemet.

●●● **Opgave 2.14:**

Løs følgende ligningssystem i de fem variable x_1, x_2, x_3, x_4, x_5:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 4x_2 - 8x_3 + 12x_4 - 2x_5 &= 0 \\ 5x_3 + 15x_4 - 10x_5 &= 0 \end{aligned}$$

●●● **Opgave 2.15:**

Løs følgende ligning i de fem variable x_1, x_2, x_3, x_4, x_5:

$$x_1 + 6x_2 - 10x_3 - 7x_4 + 12x_5 = -11$$

3 Vektorrum

Indtil videre har vi arbejdet med løsninger til lineære ligningssystemer. Dette er dog slet ikke det centrale emne i lineær algebra, blot en smart anvendelse, der kommer naturligt med teorien. Det centrale objekt i lineær algebra er *vektorrum*. For ikke at indføre for mange begreber, arbejder vi kun med reelle vektorrum.

Definition 3.1. En *addition* på en mængde V er en funktion $+ : V \times V \to V$. En (reel) skalar-multiplikation på V er en funktion $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$. I stedet for at skrive $+(v, w)$ skriver vi $v + w$, og i stedet for $\cdot(a, v)$ skriver vi $a \cdot v$.

Eksempel 3.2. Den sædvanlige addition på $\mathbb{R}$ er en reel addition. F.eks. er $3 + 7 = 10$. Ligeledes er den sædvanlige multiplikation en reel skalar-multiplikation. F.eks. er $3 \cdot 7 = 21$.

Bemærkning 3.3. Ofte udelader vi gangetegnet $\cdot$, hvis det er implicit, at det skal være det. Hvis f.eks. $a, b \in \mathbb{R}$ er to reelle tal, skriver vi som regel bare ab for $a \cdot b$.

Definition 3.4. Et reelt vektorrum V er en mængde med en addition $+$ og en reel multiplikation $\cdot$, så følgende regler gælder:

1. $u + v = v + u$ for alle $u, v \in V$ (den *kommutative* egenskab for addition).
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$ for alle $u, v, w \in V$ (den *associative* egenskab for addition).
3. Der eksisterer et element $0 \in V$, så $v + 0 = v$ for alle $v \in V$ (eksistens af *additivt neutralelement*).
4. For alle $u \in V$ findes et $v \in V$ så $u + v = 0$ (eksistens af en *additiv invers*).
5. For alle $u \in V$ og $a, b \in \mathbb{R}$ gælder $a(bu) = (ab)u$ (den *associative* egenskab for multiplikation).
6. For alle $v \in V$ gælder $1v = v$ (*multiplikativ identitet*).
7. For alle $a, b \in \mathbb{R}$ og $u, v \in V$ gælder $a(u + v) = au + av$ og $(a + b)u = au + bu$ (de *distributive egenskaber*).

Et element v i et vektorrum V kaldes ofte en *vektor*.

Ovenstående definition indeholder meget information. Heldigvis er det ikke nødvendigt at huske alle punkterne (jeg var også nødt til at slå den op, da jeg skrev disse noter!). Det vigtige er at forstå de forskellige regler, der tilsammen siger, at addition og multiplikation opfører sig pænt, som vi er vant til. Nogle eksempler hjælper også på forståelsen.

Eksempel 3.5. $\mathbb{R}$ er et reelt vektorrum. Alle reglerne i definitionen ovenover er blot nogle af de regler, vi er vant til gælder i de reelle tal. F.eks. har vi $3(2 + 4) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4$, og hvis $a \in \mathbb{R}$ er et reelt tal, vil $a + (-a) = 0$.

Eksempel 3.6. En af de vigtigste reelle vektorrum er $\mathbb{R}^n$. Dette er mængden af lister $(x_1, ..., x_n)$ med n reelle tal. F.eks. stødte vi på planet $\mathbb{R}^2$ og rummet $\mathbb{R}^3$ i første afsnit. Vi definerer addition og multiplikation som følger:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ . \\ . \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}$$

I kan sikkert genkende disse regler som at lægge vektorer sammen i klassisk forstand og som at skalere/forlænge/forkorte en vektor med skalaren a. Disse regneregler opfylder klart de syv regler i definition 3.4, så $\mathbb{R}^n$ er et vektorrum.

Eksempel 3.7. Lad $\mathbb{R}[x]$ betegne mængden af alle polynomier med reelle koefficienter. F.eks. er $3x^4 + x^2 - 1$ og $x^3 - 2x^2 + 8x - 9$ elementer i $\mathbb{R}[x]$. Hvis vi ganger et polynomium $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ met et reelt tal a får vi klart et nyt polynomium $af(x) \in \mathbb{R}[x]$, og vi kan lægge polynomier sammen og igen få et polynomium. F.eks. er

$$(x^2 + 1) + (3x^5 - 6x^3 - 2x^2 - 15) = 3x^5 - 6x^3 - x^2 - 14$$

Med disse to regneoperationer ser vi, at $\mathbb{R}[x]$ er et reelt vektorrum.

Eksempel 3.8. Lad $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ betegne mængden af alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Hvis $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er funktioner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$, er $f + g$ også en funktion fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$. Ligeledes, hvis $a \in \mathbb{R}$ er af en funktion fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$. For alle $x \in \mathbb{R}$ har vi for alle $f, g, h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, at

$$\begin{aligned}(f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) \\ &= (f + g)(x) + h(x) = ((f + g) + h)(x),\end{aligned}$$

så $f + (g + h) = (f + g) + h$, hvilket er associativitet for addition af funktioner. På samme måde verificeres de andre regler i definition 3.4, så $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ses at være et reelt vektorrum.

Lad os vise nogle simple resultater for vektorrum.

Proposition 3.9. *Lad V være et reelt vektorrum. Det additive neutralelement 0 er unikt.*

Bevis. Antag, at $0'$ er et andet additivt neutralelement. Vi har da

$$0 = 0 + 0' = 0',$$

hvilket viser det ønskede. ■

Proposition 3.10. *Lad V være et reelt vektorrum. For alle $u \in V$ er det additive inverselement unikt.*

Bevis. Lad v og w være inverselementer for u. Da har vi

$$v = 0 + v = (w + u) + v = w + (u + v) = w + 0 = w$$

som ønsket. ■

Pga. ovenstående result giver det mening at betegne inverselementet for v med $-v$ (og det giver mening at sige "inverselementet" i bestemt form!). De følgende resultater viser, at $-$ og 0 opfører sig som, vi forventer.

Proposition 3.11. *For alle reelle vektorrum V gælder $0v = 0$ for alle $v \in V$ (hvor 0 på venstresiden skal forstås som tallet 0, mens 0 på højresiden af lighedstegnet er $0 \in V$).*

Bevis. For alle $v \in V$ gælder

$$0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$$

Lægger vi den additive inverse af $0v$ til på begge sider fås $0 = 0v$ som ønsket. ■

Proposition 3.12. *Lad V være et reelt vektorrum. For alle $v \in V$ gælder $(-1)v = -v$.*

Bevis. For $v \in V$ har vi

$$v + (-1)v = 1v + (-1)v = (1 + (-1))v = 0v = 0,$$

og dermed er $(-1)v$ en additiv invers til v. Men den additive invers $-v$ er unik, så vi må have $(-1)v = -v$. ■

3.1 Opgaver

I det følgende betegner V altid et reelt vektorrum.

• **Opgave 3.1:**
Bevis, at $-(-1)v = v$ for alle $v \in V$.

• **Opgave 3.2:**
Er den tomme mængde $\emptyset$ et vektorrum?

• **Opgave 3.3:**
Lad $u = (1, 3, -4) \in \mathbb{R}^3$ og $v = (-2, 4, 8) \in \mathbb{R}^3$. Udregn $3u + v$.

Definition 3.13. Lad V og W være reelle vektorrum. En funktion $T : V \to W$ kaldes *lineær*, hvis følgende er opfyldt:

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$ for alle $u, v \in V$ (*additivitet*).
2. $aT(u) = T(au)$ for alle $u \in V$ og $a \in \mathbb{R}$ (*homogenitet*).

•• **Opgave 3.4:**
Vis, at følgende funktioner er lineære:

1. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $T(x) = 5x$.
2. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ givet ved $T(x, y) = (2y, x + 3y)$.
3. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ givet ved $T(x) = T(x, 2x, -6x)$.

•• **Opgave 3.5:**
Er funktionen $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $T(x) = x + 7$ lineær?

•• **Opgave 3.6:**
Kom med tre (forskellige slags!) eksempler på ikke-lineære funktioner.

•• **Opgave 3.7:**
Lad $T : V \to W$ være en lineær funktion mellem de to reelle vektorrum. Vis, at $T(0) = 0$. Her skal det første 0 forstås som det additive neutralelement i V, mens det andet 0 er $0 \in W$.

••• **Opgave 3.8:**
Lad $\mathcal{L}(V, W)$ betegne mængden af lineære funktioner fra det reelle vektorum V til det andet reelle vektorrum W. Udstyr $\mathcal{L}(V, W)$ med en addition $+$ og en skalar-multiplikation $\cdot$, så $\mathcal{L}(V, W)$ bliver til et reelt vektorrum. Hvad er det additive neutralelement?

••• **Opgave 3.9:**
Denne opgave er for dem, der kender til differentialregning. Betragt afbildningen $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ fra vektorrummet af polynomier til sig selv givet ved $D(f(x)) = f'(x)$. Argumentér for, at D er en funktion, og at det er en lineær funktion.

4 Litteraturliste og videre læsning

For en mere fyldestgørende introduktion til mængder, funktioner og grundlæggende matematiske begreber, kan jeg anbefale Jesper Lützens bog Diskrete Matematiske Metoder [3]. Denne ligger frit tilgængeligt på IMFs noteside (se listen herunder). Til videre læsning i lineær algebra kan jeg klart anbefale Linear Algebra Done Right af Sheldon Axler [1]. Selv lærte jeg lineær algebra i tidernes morgen fra Lars Hesselholt og Nathalie Wahls bog Lineær Algebra [2]. Det er en meget stringent bog med stor vægt på uddybende eksempler og formelle beviser (og den er på dansk). Denne bog ligger også frit tilgængeligt på notesiden. Axlers bog er til gengæld mere pædagogisk. En blanding af de to bøger er nok optimal for at lære basal lineær algebra.

[1] Sheldon Axler. *Linear Algebra Done Right*. Springer, 3. edition, 2015. ISBN 978-3-319-11079-0.

[2] Lars Hesselholt and Nathalie Wahl. *Lineær Algebra*. Københavns Universitet, 2. edition, 2017. URL `http://web.math.ku.dk/noter/filer/matematik.htm`.

[3] Jesper Lützen. *Diskrete Matematiske Metoder*. Københavns Universitet, 2. edition, 2019. URL `http://web.math.ku.dk/noter/filer/matematik.htm`.