Integralregning

UNF København

Ungdommens Naturvidenskabelige Forening

28. september 2023

Program

1. Stamfunktioner
2. Det bestemte integral

Program

1. Stamfunktioner
2. Det bestemte integral

Hvad er en stamfunktion?

Definition

Lad f være en funktion. En stamfunktion F til f er en funktion, som opfylder, at $F'(x) = f(x)$ for alle x i f's definitionsmængde. Vi skriver også $\int f(x)dx$ for en stamfunktion til f. $\int$ kaldes et *integraltegn*.

Hvad er en stamfunktion?

Definition

Lad f være en funktion. En stamfunktion F til f er en funktion, som opfylder, at $F'(x) = f(x)$ for alle x i f's definitionsmængde. Vi skriver også $\int f(x)dx$ for en stamfunktion til f. $\int$ kaldes et *integraltegn*.

Eksempel

Lad $f(x) = x^2$ og $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Idet

$$F'(x) = \frac{1}{3}3x^{3-1} = x^2 = f(x),$$

er F en stamfunktion til f.

Hvad er en stamfunktion?

Definition

Lad f være en funktion. En stamfunktion F til f er en funktion, som opfylder, at $F'(x) = f(x)$ for alle x i f's definitionsmængde. Vi skriver også $\int f(x)dx$ for en stamfunktion til f. $\int$ kaldes et *integraltegn*.

Eksempel

Lad $f(x) = x^2$ og $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Idet

$$F'(x) = \frac{1}{3}3x^{3-1} = x^2 = f(x),$$

er F en stamfunktion til f. Betragt nu i stedet funktionen $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 10$. Idet den afledte funktion af en konstant er 0, vil $F'(x) = x^2 = f(x)$ også, så dette nye valg af F er også en stamfunktion til f.

Stamfunktioner er (næsten) unikke

Sætning (Stamfunktioner er unikke op til addition med en konstant)

Antag, at F og G begge er stamfunktioner til f. Da er $F - G$ lig en konstant.

Stamfunktioner er (næsten) unikke

Sætning (Stamfunktioner er unikke op til addition med en konstant)

Antag, at F og G begge er stamfunktioner til f. Da er $F - G$ lig en konstant.

Bevis.

Differentierer vi $F - G$, får vi

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Dermed er differentialkvotienten til $F - G$ identisk nul. Men en funktion, som har nul som afledt, er konstant. Dette fuldfører beviset. ∎

Stamfunktionen til en sum af funktioner

Proposition

Lad f og g være funktioner. Antag, at F er en stamfunktion til f, og at G er en stamfunktion til g. Da er $F+G$ en stamfunktion til $f+g$. Skrevet på en anden måde,

$$\int f(x)+g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Stamfunktionen til en sum af funktioner

Proposition

Lad f og g være funktioner. Antag, at F er en stamfunktion til f, og at G er en stamfunktion til g. Da er $F + G$ en stamfunktion til $f + g$. Skrevet på en anden måde,

$$\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Vigtige pointer:

- Når vi skal bestemme stamfunktioner, kan vi nøjes med at se på hvert led.
- Integrationskonstanter er ikke vigtige i denne workshop. Så vi kan sætte dem til nul for simpelhedens skyld.

Polynomier

Husk, at hvis $f(x) = x^n$, da er $f'(x) = nx^{n-1}$.

Polynomier

Husk, at hvis $f(x) = x^n$, da er $f'(x) = nx^{n-1}$. Vi har altså:

Proposition

Lad $f(x) = x^n$ for $n \neq 0$. Da er

$$\int f(x)dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}.$$

Polynomier

Husk, at hvis $f(x) = x^n$, da er $f'(x) = nx^{n-1}$. Vi har altså:

Proposition

Lad $f(x) = x^n$ *for* $n \neq 0$. *Da er*

$$\int f(x)dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}.$$

Øvelse

Lad $f(x) = x^2 + 6x - 4$. Bestem $\int f(x)dx$.

Andre vigtige funktioner

Proposition

Der gælder følgende:

1. $\int \cos(x)dx = \sin(x)$.
2. $\int \sin(x)dx = -\cos(x)$.
3. $\int e^x dx = e^x$.
4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$.

Opgaver

Lav opgave 1.1 og 1.2 på side 7. Til 1.2 kan I benytte følgende:

$$\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2,$$
$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x.$$

Brug også gerne tabellen på side 6.

Integration ved substitution

Sætning (Substitution)

Lad f være differentiabel med f' kontinuert, og lad g være kontinuert. Da gælder

$$\int g(f(x))f'(x)dx = \int g(u)du \quad \textit{for} \quad u = f(x).$$

Integration ved substitution

Sætning (Substitution)

Lad f være differentiabel med f' kontinuert, og lad g være kontinuert. Da gælder

$$\int g(f(x))f'(x)dx = \int g(u)du \quad \text{for} \quad u = f(x).$$

Eksempel

Lad os bestemme

$$\int 2x\cos(x^2)dx.$$

Integration ved substitution

Eksempel

Lad os bestemme

$$\int x^2 e^{x^3}\, dx.$$

Integration ved substitution

Eksempel

Lad os bestemme

$$\int x^2 e^{x^3} dx.$$

Lad os nu se, hvorfor substitution virker. Vi tager beviset på tavlen.

Partiel integration

Sætning (Partiel integration)

Lad f og g være kontinuerte funktioner. Lad F være en stamfunktion til f, og lad G være en stamfunktion til g. Da gælder

$$\int F(x)g(x)dx = F(x)G(x) - \int G(x)f(x)dx.$$

Sætningen bruges ved at vælge F og g på en smart måde.

Partiel integration

Sætning (Partiel integration)

Lad f og g være kontinuerte funktioner. Lad F være en stamfunktion til f, og lad G være en stamfunktion til g. Da gælder

$$\int F(x)g(x)dx = F(x)G(x) - \int G(x)f(x)dx.$$

Sætningen bruges ved at vælge F og g på en smart måde.

Eksempel

Lad os bestemme en stamfunktion til $x^2 \cos(x)$.

Bevis for partiel integration

Bevis.

Beviset er en direkte konsekvens af produktreglen. Produktreglen giver os, at

$$(F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x).$$

Tager vi stamfunktioner af begge sider, får vi

$$F(x)G(x) = \int f(x)G(x)dx + \int F(x)g(x)dx.$$

Trækker vi $\int f(x)G(x)dx$ fra på begge sider, fås det ønskede. ∎

Opgaver

Lav opgave 1.3 til 1.7 på side 7.

Program

Det bestemte integral

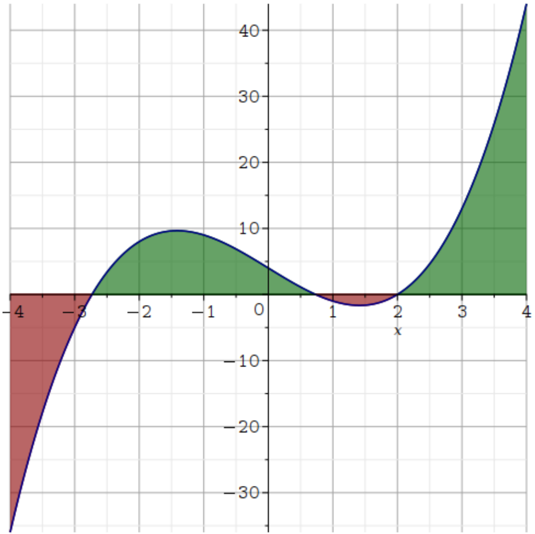
Definition

Givet en funktion f defineret på $[a, b]$, da betegner *det bestemte integrale*

$$\int_a^b f(x)dx$$

arealet under grafen for f i intervallet $[a, b]$.

Det bestemte integral og arealet under grafen



Beregning af bestemte integraler

Sætning

Lad f være en kontinuert funktion defineret på intervallet $[a, b]$, og lad F være en stamfunktion til f. Da er

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Beregning af bestemte integraler

Sætning

Lad f være en kontinuert funktion defineret på intervallet $[a, b]$, og lad F være en stamfunktion til f. Da er

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Eksempel

Lad os udregne $\int_0^1 xdx$.

Beregning af bestemte integraler

Sætning

Lad f være en kontinuert funktion defineret på intervallet $[a, b]$, og lad F være en stamfunktion til f. Da er

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Eksempel

Lad os udregne $\int_0^1 xdx$.

Eksempel

Lad os udregne $\int_{-4}^4 x^3 - 6x + 4dx$.

Regneregler for bestemte integraler

Proposition

Lad f og g være kontinuerte funktioner defineret på $[a, b]$. Da gælder

1. $$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$
2. $$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$
3. $$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Regneregler

Vi har også *indskudsreglen*: Hvis intervallet $[a, b]$ deles op i de to dele $[a, c]$ og $[c, b]$ for et punkt c, da gælder

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Opgaver

Regn opgave 2.1 og 2.2 på side 12. I kan også arbejde videre med dem fra tidligere.

Er der tid, gennemgår vi uegentlige integraler.

Uegentlige integraler

Hvad hvis vi ønsker at integrere over et uendeligt stort område?

Uegentlige integraler

Hvad hvis vi ønsker at integrere over et uendeligt stort område? F.eks.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx.$$

Uegentlige integraler

Hvad hvis vi ønsker at integrere over et uendeligt stort område? F.eks.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx.$$

Tricket er grænseværdier:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{N \to \infty} \int_1^N \frac{1}{x^2} dx.$$

Tak for denne gang

Andre arrangementer (foredrag, workshops og andet) i UNF København kan ses her: https://unf.dk/aktiviteter/?department=kbh

Information om vores sommer-sciencecamps kan ses her: https://unf.dk/sciencecamps/