Workshop i integralregning

Rasmus Frigaard Lemvig (rle@unf.dk)

Ungdommens Naturvidenskabelige Forening København

Dato: 28. september 2023

Introduktion til workshoppen

Velkommen til workshoppen i integralregning! Denne workshop bygger ovenpå den i differentialregning, og det forudsættes, at man har styr på de gængse regler for differentialregning, omend de bliver repeteret i løbet af workshoppen. Som det første dykker vi ned i stamfunktioner, hvor vi skal lære stamfunktionerne for de mest kendte funktioner at kende. Derefter udleder vi de vigtigste teknikker til at bestemme stamfunktioner og ser nogle flere eksempler. Her trækker vi i høj grad på vores viden fra differentialregning. Når vi har fået styr på stamfunktioner går vi videre til at udregne arealer under kurver. Dette viser sig at være nært beslægtet med problemet med at bestemme stamfunktioner. Til slut skal vi se på en anvendelse i form af kontinuerte stokastiske variable.

Opgaverne til workshoppen har tre sværhedsgrader indikeret med blå prikker, hvor én prik er nemmest og tre er sværest.

1 Stamfunktioner

1.1 Introduktion

Vi skal til en start stifte bekendtskab med stamfunktioner. At bestemme stamfunktioner svarer til det omvendte af differentiering.

Definition 1.1. Lad f være en funktion. En stamfunktion F til f er en funktion, som opfylder, at $F'(x) = f(x)$ for alle x i f's definitionsmængde. Vi skriver også $\int f(x)dx$ for en stamfunktion til f. $\int$ kaldes et *integraltegn*.

Eksempel 1.2. Lad $f(x) = x^2$ og $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Idet

$$F'(x) = \frac{1}{3}3x^{3-1} = x^2 = f(x),$$

er F en stamfunktion til f. Betragt nu i stedet funktionen $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 10$. Idet den afledte funktion af en konstant er 0, vil $F'(x) = x^2 = f(x)$ også, så dette nye valg af F er også en stamfunktion til f.

Givet en funktion f, som har en stamfunktion, er sådan en stamfunktion unik? Eksemplet ovenover viser, at svaret er nej, idet vi fandt to forskellige stamfunktioner til $f(x) = x^2$. De to funktioner havde dog kun en konstant til forskel. Dette viser sig at gælde helt generelt.

Sætning 1.3 (Stamfunktioner er unikke op til addition med en konstant). *Antag, at F og G begge er stamfunktioner til f. Da er $F - G$ lig en konstant.*

Bevis. Differentierer vi $F - G$, får vi

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Dermed er differentialkvotienten til $F - G$ identisk nul. Men en funktion, som har nul som afledt, er konstant. Dette fuldfører beviset. ∎

Bemærkning 1.4. Grundet ovenstående resultat er det ikke interessant at inkludere konstanter i en stamfunktion til en given funktion. F.eks. vil vi for $f(x) = x^2$ blot benytte stamfunktionen $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.

I differentialregning er der en lang række regneregler (produktreglen, kædereglen, kvotientreglen etc.), som kan løse de fleste differentiationsproblemer, hvis man ellers kan holde tungen lige i munden. Det viser sig, at integralregning er en del sværere. Ofte er man nødt til at gætte sig frem, og det er ikke sikkert at regnereglerne (som vi kommer ind på om lidt) er behjælpelige. Derudover kan det forekomme, at selvom stamfunktionen eksisterer, kan man ikke opskrive den! Ønsker man at blive god til stamfunktioner, er man nødt til at opbygge et arsenal af velkendte stamfunktioner, man kan tage udgangspunkt i. Vi skal starte med at se på polynomier, der viser sig at være nemme at integrere. Inden skal vi dog have en central regneregel på plads.

Proposition 1.5. *Lad f og g være funktioner. Antag, at F er en stamfunktion til f, og at G er en stamfunktion til g. Da er $F + G$ en stamfunktion til $f + g$. Skrevet på en anden måde,*

$$\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Bevis. Vi differentierer og får

$$(F + G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x),$$

hvilket færdiggør beviset. ∎

1.2 Stamfunktioner af polynomier

Husk, at et polynomium er en funktion på formen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

hvor alle $a_i$er er konstanter. Vi genkalder den vigtige regneregel, at hvis $f(x) = x^n$, da er $f'(x) = nx^{n-1}$. Altså skal vi gange eksponenten ned og trække én fra eksponenten bagefter. Den omvendte operation er at lægge én til eksponenten og derefter dividere med den nye eksponent. Denne tankegang leder til følgende resultat:

Proposition 1.6. *Lad $f(x) = x^n$ for $n \neq -1$. Da er*

$$\int f(x)dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}.$$

Bevis. Lad $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$. Da er

$$F'(x) = \frac{1}{n+1}(n+1)x^{n+1-1} = x^n,$$

hvilket viser det ønskede. ∎

Eksempel 1.7. Lad $f(x) = 2x^2 + 3x - 6$. En stamfunktion til f bestemmes:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int 2x^2 dx + \int 3x dx - \int 6 dx \\ &= 2\int x^2 dx + 3\int x dx - 6\int 1 dx \\ &= 2\frac{1}{3}x^3 + 3\frac{1}{2}x^2 - 6x.\end{aligned}$$

1.3 Andre vigtige funktioner

I dette korte afsnit fastlægger vi stamfunktionerne til en række centrale funktioner. Resultatet herunder bygger direkte ovenpå vores kendskab til den afledte af de involverede funktioner.

Proposition 1.8. *Der gælder følgende:*

1. $\int \cos(x)dx = \sin(x)$.
2. $\int \sin(x)dx = -\cos(x)$.
3. $\int e^x dx = e^x$.
4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$.

Bevis. Vi viser hvert punkt for sig:

1. Dette følger af, at $\sin'(x) = \cos(x)$.
2. Vi ved, at $\cos'(x) = -\sin(x)$. Dermed vil differentialkvotienten af $-\cos(x)$ være $\sin(x)$.
3. Dette følger af, at $(e^x)' = e^x$.
4. Dette følger af, at $\ln'(x) = 1/x$.

∎

1.4 Regneregler for stamfunktioner

I dette afsnit introducerer vi to centrale teknikker til at finde stamfunktioner. De bygger begge direkte på velkendte regler fra differentialregningen, hvilket også fremgår af deres beviser.

Sætning 1.9 (**Substitution**)**.** *Lad f være differentiabel med f' kontinuert, og lad g være kontinuert. Da gælder*

$$\int g(f(x))f'(x)dx = \int g(u)du \quad \textit{for} \quad u = f(x).$$

Bevis. Lad G være en stamfunktion til g. Fra kædereglen fås

$$(G(f(x)))' = G'(f(x))f'(x) = g(f(x))f'(x).$$

Tages stamfunktioner på begge sider, får vi

$$\int g(f(x))f'(x)dx = \int (G(f(x)))'dx = G(f(x)) = G(u) = \int g(u)du.$$

■

Substitution kan godt være mystisk første gang, man støder på det. Lad os tage nogle eksempler på brug af sætningen. Tricket er altid det samme. Vælg en passende ydre funktion og find den afledte af inputtet ganget på et andet sted.

Eksempel 1.10. Lad os bestemme

$$\int 2x\cos(x^2)dx.$$

Vi ser, at $(x^2)' = 2x$ indgår i integralet. Lad $g(x) = \cos(x)$ og $f(x) = x^2$. Da er ovenstående lig $\int g(f(x))f'(x)dx$, og dermed giver sætningen om substitution, at udtrykket ovenover er lig

$$\int g(u)du = \int \cos(u)du = \sin(u)$$

for $u = x^2$. Dermed er

$$\int 2x\cos(x^2)dx = \sin(x^2).$$

Læseren kan selv tjekke, at resultatet er korrekt ved at differentiere $\sin(x^2)$ ved brug af kædereglen (at tjekke, at en stamfunktion er valid ved at differentiere den, kaldes til tider *integrationsprøven*).

Eksempel 1.11. Lad os bestemme

$$\int x^2e^{x^3}dx.$$

Vi gætter på, at e^x spiller rollen som den ydre funktion og x^3 som den indre. Desværre indgår $(x^3)' = 3x^2$ ikke i integralet. Vi kan dog fremtrylle denne afledte ved at gange med $1/3$ og derefter med 3 som følger:

$$\int x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int 3x^2e^{x^3}dx.$$

Nu kan sætningen om substitution bruges direkte med $u = x^3$:

$$\int x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int 3x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u = \frac{1}{3}e^{x^3}.$$

Igen kan læseren tjekke resultatet efter ved at differentiere resultatet.

Inden vi går videre med den anden vigtige regneregel til at bestemme stamfunktioner, gennemgår vi en teknik til at benytte substitution. Denne teknik (der nok nærmere er en huskeregel) benytter, at man kan skrive differentialkvotienten for en funktion f som

$$f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

Denne notation kan bruges til at huske kædereglen på følgende vis. Man leger, at $\frac{df}{dx}$ er en brøk, og ved at skrive differentialkvotienten af den sammensatte funktion som $dg(f)/dx$, kan man "gange og dividere" med df og få

$$\frac{dg(f)}{dx} = \frac{dg(f)}{df}\frac{df}{dx},$$

som jo blot er $g'(f(x))f'(x)$. På samme måde kan man bruge denne notation til at huske substitutions-reglen. Skriv $u = f(x)$. Da er

$$\int g(f(x))f'(x)dx = \int g(u)\frac{du}{dx}dx = \int g(u)du,$$

hvor man i andet trin lader som om, at der bliver ganget og divideret med dx. Bemærk, at dette blot er en huskeregel og ikke et formelt bevis. Notationen df/dx kan også bruges i at bestemme stamfunktioner. Lad os genbesøge de to forrige eksempler for at illustrere teknikken.

Eksempel 1.12. Vi ser på

$$\int 2x\cos(x^2)dx.$$

Lad $u = x^2$. Da er $du/dx = 2x$, og dermed skriver vi $du = 2xdx$ ved at "gange over" med dx. Vi får da $dx = \frac{1}{2x}dx$, og vi kan erstatte x^2 med u i integralet og få

$$\int 2x\cos(x^2)dx = \int 2x\cos(u)\frac{1}{2x}du = \int \cos(u)du.$$

Udregningerne er herefter identiske med dem fra tidligere.

Eksempel 1.13. Vi betragter igen $\int x^2e^{x^3}dx$. Vi lader $u = x^3$ og får da $du = 3x^2dx$, hvilket omskrives til $dx = \frac{1}{3x^2}du$. Altså fås med samme knep som før

$$\int x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int 3x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int 3x^2e^u\frac{1}{3x^2}du = \frac{1}{3}\int e^u du,$$

og resten af udregningerne er identiske med dem fra tidligere.

Nu ser vi på den anden centrale regneteknik, nemlig *partiel integration.*

Sætning 1.14 (**Partiel integration**). *Lad f og g være kontinuerte funktioner. Lad F være en stamfunktion til f, og lad G være en stamfunktion til g. Da gælder*

$$\int F(x)g(x)dx = F(x)G(x) - \int G(x)f(x)dx.$$

Bevis. Beviset er en direkte konsekvens af produktreglen. Produktreglen giver os, at

$$(F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x).$$

Tager vi stamfunktioner af begge sider, får vi

$$F(x)G(x) = \int f(x)G(x)dx + \int F(x)g(x)dx.$$

Trække vi $\int f(x)G(x)dx$ fra på begge sider, fås det ønskede. ■

Tricket i at bruge partiel integration er at vælge funktionerne f og g passende. Nogle gange kan det "forkerte" valg af f og g resultere i en lang sekvens af udregninger, der ikke fører til noget, mens det rigtige valg fører til smarte smutveje. Lad os se nogle eksempler.

Eksempel 1.15. Lad os bestemme en stamfunktion til $x^2\cos(x)$. Vi ved, at vi får et polynomium af lavere grad ved at differentiere et polynomium, så det giver mening at lade $F(x) = x^2$ og $g(x) = \cos(x)$. Da giver partiel integration

$$\int x^2\cos(x)dx = x^2\sin(x) - \int \sin(x)2xdx.$$

Nu skal vi blot evaluere stamfunktionen på højre side af lighedstegnet. Her giver det igen mening at benytte partiel integration som følger:

$$\begin{aligned}\int \sin(x)2xdx &= 2\int \sin(x)xdx = 2\left(-x\cos(x) - \int -\cos(x)dx\right)\\ &= -2x\cos(x) + 2\sin(x)\end{aligned}$$

Altså fås

$$\int x^2\cos(x)dx = x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x).$$

Eksemplet her illustrerer, at det til tider kan være nødvendigt at foretage partiel integration flere gange for at komme i mål.

Eksempel 1.16. Lad os bestemme en stamfunktion til $\ln(x)$. Umiddelbart ser det ud til, at partiel integration ikke kan benyttes, da vi jo ikke har et produkt af funktioner. Men det har vi faktisk. Vi kan nemlig skrive $\ln(x) = \ln(x)\cdot 1$ og vælge $F(x) = \ln(x)$ og $g(x) = 1$. Da giver partiel integration

$$\begin{aligned}\int \ln(x)dx &= \int \ln(x)\cdot 1dx = \ln(x)\cdot x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx\\ &= \ln(x)\cdot x - \int 1dx = \ln(x)\cdot x - x.\end{aligned}$$

1.5 Opsummering

$\int f(x)dx$	$f(x)$	$f'(x)$	Note
$ax + c$	a	0	
$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	x^n	nx^{n-1}	$n \neq -1$
$x\ln(x) - x + c$	$\ln(x)$	$1/x$	
$\ln(x) + c$	$1/x$	$-1/x^2$	
$e^x + c$	e^x	e^x	
$\sin(x) + c$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$-\cos(x) + c$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	

Figur 1: Tabel over en række kendte funktioner, deres afledte og deres stamfunktioner.

1.6 Opgaver

• **Opgave 1.1:**
Find en stamfunktion til følgende funktioner:

1) $x^2 + x + 1$.

2) $3x^4 - 2x^2 + 5x - 11$.

3) $\cos(x) + 2\sin(x)$.

4) $e^x + 4x^3$.

5) $10/x$.

•• **Opgave 1.2:**
Find en stamfunktion til følgende funktioner:

1) e^{-x}.

2) $2 + 2\tan(x)^2$.

3) $3x^2 + 2\ln(x)$.

4) $\sin(5x)$.

5) $1/x^2$.

•• **Opgave 1.3: Substitution**
Find en stamfunktion til følgende funktioner:

1) $e^x \cos(e^x)$.

2) $x^2 \cos(x^3)$.

3) $\cos(x)\cos(\sin(x))$.

4) $\sin(x)^4 \cos(x)$.

5) $(x^3 + 10x^2 - 5x + 2)^3(3x^2 + 20x - 5)$.

6) $\cos(x)\sin(x)$.

•• **Opgave 1.4: Partiel integration**
Find en stamfunktion til følgende funktioner:

1) xe^x.

2) $x^2 \sin(x)$.

3) $x\ln(x)$.

4) $x^2 \ln(x)$.

5) $x^2 e^x$.

6) $e^x \cos(x)$.

••• **Opgave 1.5: Blandet øvelse**
Find en stamfunktion til følgende funktioner (i nogle af opgaverne kan det være en god idé at genkalde sig de vigtige logaritmeregneregler):

1) $\ln(x)/x^2$.

2) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

3) $\ln(x^2)$.

4) $\ln(2x)$.

5) $\cos(x)\ln(2\sin(x))$.

6) $x\cos(e^x)$.

2 Det bestemte integral

2.1 Arealet under kurver

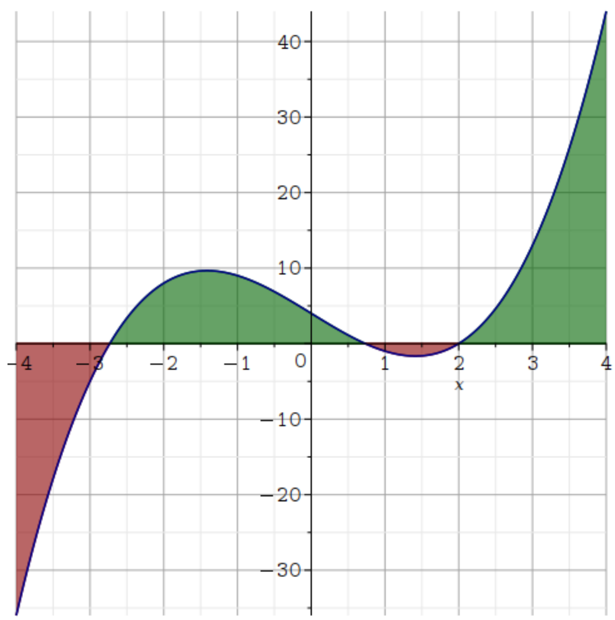
Hvorfor er stamfunktioner interessante? En af flere grunde er, at de bruges til at bestemme arealet under kurver.

Definition 2.1. Givet en funktion f defineret på $[a, b]$, da betegner *det bestemte integrale*

$$\int_a^b f(x)dx$$

arealet under grafen for f i intervallet $[a, b]$.

Hvordan skal areal forstås? Det skal forstås på den måde, at hvis funktionen f er positiv i intervallet $[a, b]$, da er integralet blot lig arealet i klassisk forstand. Hvis f er negativ nogle steder i intervallet, da betegner integralet arealet med negativt fortegn. Lad os illustrere dette med funktionen $f(x) = x^3 - 6x + 4$. Se figuren herunder:



Figur 2: Arealet under kurven for en funktion. Rød indikerer negativt fortegn og grøn positivt fortegn.

De grønne områder indikerer areal med positivt fortegn, mens det røde areal har negativt fortegn. I dette tilfælde er integralet over de områder, hvor funktionen er negativ (over de røde områder) ca. −20,785. Integralet, hvor funktionen er positiv (under de grønne områder), giver ca. 52,785. Alt i alt fås

$$\int_{-4}^4 f(x)dx = 52{,}785 - 20.785 = 32.$$

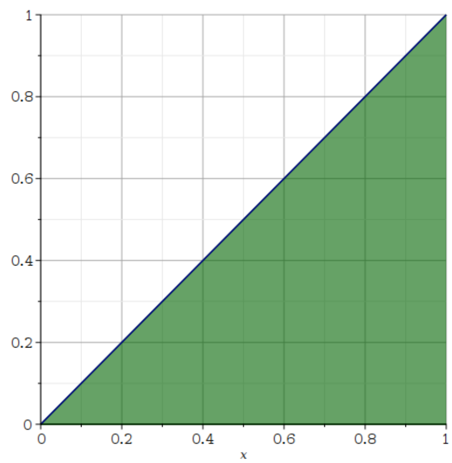
Hvordan indgår stamfunktioner i beregning af det bestemte integrale? Det er en længere fortælling, men vi skal i denne workshop tage en af de vigtigste resultater i matematisk analyse for givet, nemlig *Analysens Fundamentalsætning*. Den fortæller os følgende.

Sætning 2.2. *Lad f være en kontinuert funktion defineret på intervallet $[a, b]$, og lad F være en stamfunktion til f. Da er*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Lad os tage nogle eksempler på brugen af denne sætning.

Eksempel 2.3. Lad $f(x) = x$ på intervallet $[0, 1]$ som skitseret herunder.



Figur 3: Funktionen $f(x) = x$ i intervallet $[0, 1]$ med arealet under kurven farvet grøn.

Det er ikke svært at se, at arealet under kurven bør være $1/2$. Lad os tjekke, at Analysens Fundamentalsætning giver samme resultat. Vi ved, at $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ er en stamfunktion til f. Vi får da

$$\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2},$$

hvilket stemmer overens med vores forventning.

Eksempel 2.4. Lad $f(x) = x^3 - 6x + 4$, som også er den funktion, vi så grafen for til at starte med. Vi ønsker at beregne

$$\int_{-4}^4 f(x)dx.$$

Vi bestemmer nemt en stamfunktion til $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 4x$. Vi får da

$$\int_{-4}^4 f(x)dx = F(4) - F(-4) = \frac{1}{4}4^4 - 3 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 - (\frac{1}{4}(-4)^4 - 3 \cdot (-4)^2 + 4 \cdot (-4)) = 32,$$

hvilket lettest indses ved at bemærke, at de fleste led går ud med hinanden. Kun $4 \cdot 4$ og $-(4 \cdot (-4))$ overlever.

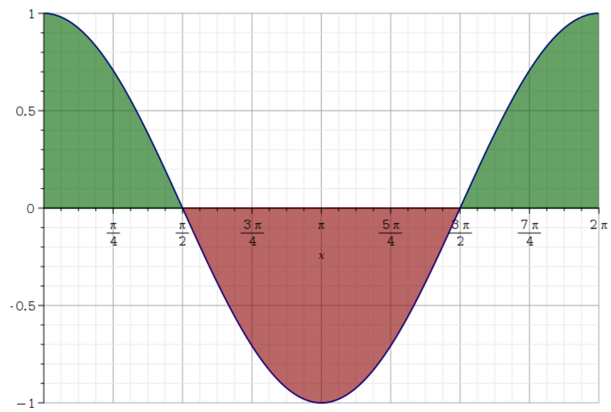
Eksempel 2.5. Vi ønsker at beregne

$$\int_0^{2\pi} \cos(x)dx.$$

Vi ved, at sin er en stamfunktion til cos, så vi får

$$\int_0^{2\pi} \cos(x)dx = \sin(2\pi) - \sin(0) = 0 - 0 = 0.$$

Ser vi på grafen for cosinus i intervallet med arealerne illustrerede, får vi figuren herunder.



Det ses, at de positive og de negative arealer udligner hinanden, hvilket forklarer vores resultat.

Lad os til slut opliste nogle regneregler for integraler.

Proposition 2.6. *Lad f og g være kontinuerte funktioner defineret på $[a, b]$. Da gælder*

1.
$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2.
$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

3.
$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

4. Hvis intervallet $[a, b]$ deles op i de to dele $[a, c]$ og $[c, b]$ for et punkt c, da gælder

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Lad os forsøge at sætte noget intuition på disse regneregler. Den første regneregel siger, at arealet under summen af to funktioner blot er summen af arealet under hvert af dem. Den anden er mindre klar. Den siger, at hvis man bytter rundt på integralgrænserne, skal man ændre fortegnet af det oprindelige integral. Man kan tænke på det sådan, at $\int_a^b f(x)dx$ betyder, at man integrerer fra a til b. Hvis man ændrer retning, får arealet også omvendt fortegn. Trejde punkt giver sig selv. At integrere over et punkt burde give nul, eftersom man får en linje (som har areal 0). Den fjerde regel er så vigtig, at den har sit eget navn, nemlig *indskudsreglen*. Intuitivt giver den mening, da den blot siger, at arealet fra a til b er lig arealet fra a til c lagt til arealet fra c til b.

2.2 Uegentlige integraler

I mange henseender er man ikke kun interesseret i at integrere over et begrænset interval. Man kunne f.eks. være interesseret i at integrere over hele den reelle talakse eller alle positive reelle tal. Hvordan udregner vi bestemte integraler i dette tilfælde? Lad os studere det konkrete eksempel

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx,$$

hvor kun den ene grænse er ikke-endelig. Her udregnes integralet som:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{1}{x^2}dx.$$

Dermed skal vi blot udregne integralet med øvre grænse N. Dette gøres snildt. $1/x^2$ har $-1/x$ som stamfunktion. Dermed fås

$$\int_1^N \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{N} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{N},$$

og det endelige resultat bliver

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{1}{N}\right) = 1.$$

Hvad hvis vi har et integral på formen

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx?$$

Da gør vi noget fuldstændigt analogt:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^N f(x)dx.$$

Bemærk, at sådanne integraler ikke nødvendigvis er endelige. Et godt eksempel er

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx.$$

Husk, at $1/x$ har $\ln(x)$ som stamfunktion. I dette tilfælde fås da

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{1}{x}dx = \lim_{N\to\infty}(\ln(N) - \ln(1)) = \lim_{N\to\infty}\ln(N) = \infty.$$

2.3 Opgaver

- **Opgave 2.1:**
  Udregn følgende:

  1)

$$\int_{-2}^3 x^2 dx.$$

  2)

$$\int_0^1 x^3 - 4x^2 + x - 1 dx.$$

3)

$$\int_0^{\ln(3)} e^x dx.$$

4)

$$\int_{-2}^1 x^2 + 2x + 4dx.$$

5)

$$\int_1^3 \frac{1}{x} dx.$$

6)

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx.$$

●● **Opgave 2.2:**

Udregn følgende bestemte integraler. Det kan være smart at bruge nogle resultater fra tidligere opgaver.

1)

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x) + 2\sin(x) dx.$$

2)

$$\int_0^{\pi} \sin(x)^4 \cos(x) dx.$$

3)

$$\int_3^4 \frac{1}{x^2} dx.$$

4)

$$\int_0^{\pi/2} e^x \cos(x) dx.$$

5)

$$\int_0^a 1 dx.$$

6)

$$\int_1^e x^2 \ln(x) dx.$$

●● **Opgave 2.3:**
Udregn følgende ugentlige integraler:

1)

$$\int_0^\infty e^{-x} dx.$$

2)

$$\int_0^\infty xe^{-x} dx.$$

3)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2} dx.$$

●●● **Opgave 2.4:**
Bestem de p, hvorom det gælder, at

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$$

er endelig. Vink: Der skal deles op i en række tilfælde for p. Tag evt. et kig på diskussionen fra afsnit 2.2 for inspiration.

3 En anvendelse: Kontinuerte fordelinger

Hvis I har haft sandsynlighedsteori og statistik, kender I muligvis til nogle diskrete fordelinger. Eksempler er binomialfordelingen og Poisson-fordelingen. I mange henseender er det dog interessant at arbejde med *kontinuerte* fordelinger, som er fordelinger, der tilskriver positiv sandsynlighed til intervaller af den reelle akse i stedet for diskrete værdier (f.eks. $1, 2, 3, ...$).

Lad os først få lidt terminologi på plads. Det centrale objekt i sandsynlighedsteori er *stokastiske variable*. Disse er funktioner fra det underliggende udfaldsrum til den reelle akse. Et typisk eksempel er plat eller krone. Udfaldsrummet består af de to mulige udfald, nemlig plat (P) og krone (K). Da ville funktionen X givet ved $X(P) = 0$ og $X(K) = 1$ være et eksempel på en stokastisk variabel. Da stokastiske variable er tilfældige, giver det mening at beskrive dem gennem en fordeling. I tilfældet med plat eller krone er sandsynligheden 0,5 (svarende til 50%) for både plat eller krone, hvilket vi kan skrive som

$$P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

For en diskret stokastisk variabel kaldes $f_X(x) = P(X = x)$ *tætheden* for X. Tætheden giver alt den information, vi behøver om fordelingen af X. For en kontinuert stokastisk variabel er det dog ikke så simpelt at definere f_X, eftersom $P(X = x) = 0$ for alle reelle tal x. Her kommer integralregning ind i billedet.

Definition 3.1. For en stokastisk variabel X, kaldes funktionen

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

for *fordelingsfunktionen* af X. Funktionen

$$f_X(x) = F_X'(x)$$

kaldes *tætheden* for X.

Bemærkning 3.2. Tætheden og fordelingsfunktionen for en stokastisk variabel giver den samme information. Kender man tætheden f_X, kan fordelingsfunktionen findes ved

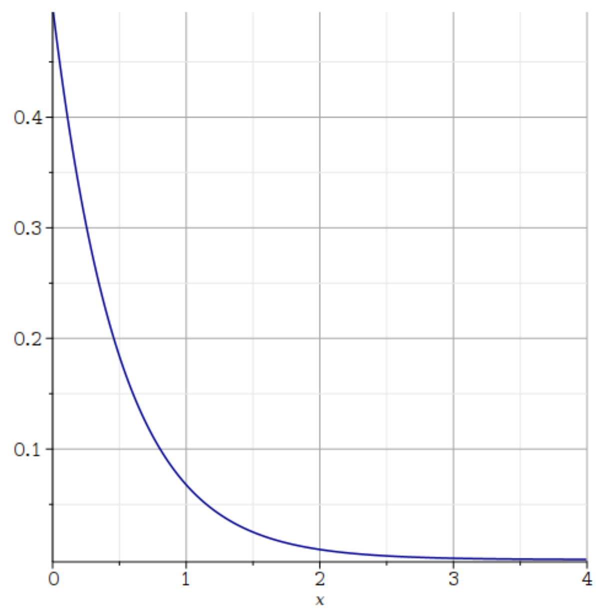
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt,$$

mens relationen $f_X(x) = F_X'(x)$ fortæller os, at kender man fordelingsfunktionen, kender man også tætheden.

Eksempel 3.3. En stokastisk variabel X kaldes *eksponentialfordelt* med *rateparameter* $\lambda > 0$, hvis tætheden for X er lig

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{for } x > 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}.$$

Funktionen er skitseret herunder med $\lambda = 2$:



Figur 4: Tætheden for en eksponentialfordelt stokastisk variabel med rateparameter 2.

En tæthed angiver, hvor det er mest sandsynligt, at X antager værdier. På grafen ses det, at det er meget sandsynligt, at X tager værdier mellem 0 og 2, mens sandsynligheden er markant mindre for værdier større end 2. Vi kan bestemme fordelingsfunktionen på følgende vis:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}dt = \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda t}dt.$$

En stamfunktion til $e^{-\lambda t}$ er givet ved $-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}$. Dermed fås

$$F_X(x) = \lambda \left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} - \left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda \cdot 0} \right) \right) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Der findes et utal af måder at beskrive fordelinger/stokastiske variable på. Én af disse måder er at beregne *momenterne* af fordelingen, såfremt de eksisterer. Vi skal dog undlade at gå for meget ind i de tekniske detaljer omkring eksistensen af momenter.

Definition 3.4. Lad X være en kontinuert stokastisk variabel med tæthed f_X. Da kaldes værdien

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)dx$$

det k'te moment af X. Det første moment

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$$

kaldes *middelværdien* af X.

$$\mathrm{Var}[X] = E[(X - E[X])^2]$$

kaldes *variansen* af X.

Middelværdien kaldes også forventningen (E er engelsk for *expectation*) og beskriver den gennemsnitlige værdi af vores stokastiske variabel. Variansen beskriver, hvor meget vi forventer, at vores stokastiske variabel vil variere ift. middelværdien. Begge er særdeles centrale til at beskrive fordelinger. Inden vi regner på et eksempel, skal vi have et resultat, der fastlægger nogle grundlæggende egenskaber for disse størrelser.

Proposition 3.5. *Lad X og Y være stokastiske variable og a og b reelle tal.*

1. *Middelværdien opfylder* linearitet*, dvs.*

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y].$$

2. $Var[aX] = a^2\, Var[X]$.
3. $Var[X + a] = Var[X]$.
4. $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$.

Bevis.

1. Dette følger direkte af definitionen af middelværdien (læseren bør overbevise sig selv om, at integraler opfylder linearitet).
2. Fra definitionen af varians samt linearitet af middelværdien fås

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[aX] &= E[(aX - E[aX])^2] = E[(aX - aE[X])^2] \\ &= E[a^2(X - E[X])^2] = a^2E[(X - E[X])^2] = a^2\mathrm{Var}[X].\end{aligned}$$

3. Overlades som øvelse til læseren.
4. Vi udregner

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= E[(X - E[X])^2] = E[X^2 + E[X]^2 - 2XE[X]] \\ &= E[X^2] + E[E[X]^2] - E[2XE[X]].\end{aligned}$$

Husk, at middelværdien er et tal, og derfor giver linearitet

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] + E[X^2] - 2E[X]E[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

som ønsket.

■

Eksempel 3.6. Vi ser igen på eksponentialfordelingen med rateparameter $\lambda > 0$. Vi beregner middelværdien og variansen. Med partiel integration findes stamfunktionen

$$-xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$$

til $\lambda x e^{-\lambda x}$. Dermed fås

$$E[X] = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx = \lim_{N\to\infty}\left(-Ne^{-\lambda N} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda N} - \left(-0e^{-\lambda 0} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda 0}\right)\right)$$

og idét $-Ne^{-\lambda N}$ går mod nul, som N går mod nul, er ovenstående lig $1/\lambda^2$. Med partiel integration kan vi finde stamfunktionen

$$-x^2e^{-\lambda x} - \frac{2}{\lambda}xe^{-\lambda x} - \frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda x},$$

og en udregning som ovenover giver

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Ergo giver propositionen ovenover, at

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3.1 Opgaver

••• **Opgave 3.1:**
En kontinuert stokastisk variabel U kaldes *uniformt fordelt* på $[a, b]$ hvis den har en tæthed givet ved

$$f_U(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{for } a \le x \le b \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

1)Skitsér tætheden i et koordinatsystem. Giv en forklaring af, hvordan denne variabel opfører sig.

2)Vis, at

$$\int_{-\infty}^\infty f_U(x)dx = 1.$$

Vink: Husk, at integralet er nul alle steder, hvor f_U er nul.

3)Vis, at

$$E[U] = \frac{1}{2}(a+b).$$

4)Vis, at

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{1}{12}(b-a)^2.$$

•• **Opgave 3.2:**
Bevis punkt 3. i Proposition 3.5.