Differentialregning

UNF København

Ungdommens Naturvidenskabelige Forening

14. september 2023

Program

Program

Sekanten

Definition

Lad en funktion f være defineret på et åbent interval (a, b), og lad to punkter x_0 og x_1 ligge i (a, b). *Sekanten* tilhørende f mellem x_0 og x_1 er den rette linje, der går gennem $f(x_0)$ og $f(x_1)$.

Sekanten

Definition

Lad en funktion f være defineret på et åbent interval (a, b), og lad to punkter x_0 og x_1 ligge i (a, b). *Sekanten* tilhørende f mellem x_0 og x_1 er den rette linje, der går gennem $f(x_0)$ og $f(x_1)$.

Bemærkning

Hældningen for sekanten er givet ved

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

som er veldefineret, så længe $x_1 \neq x_0$ (ellers får vi division med nul).

Sekanten

Definition

Lad en funktion f være defineret på et åbent interval (a, b), og lad to punkter x_0 og x_1 ligge i (a, b). *Sekanten* tilhørende f mellem x_0 og x_1 er den rette linje, der går gennem $f(x_0)$ og $f(x_1)$.

Bemærkning

Hældningen for sekanten er givet ved

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

som er veldefineret, så længe $x_1 \neq x_0$ (ellers får vi division med nul).

Tegning på tavlen.

Differenskvotienten

Betragt hældningen af sekanten

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Differenskvotienten

Betragt hældningen af sekanten

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Lader vi $\Delta x = x_1 - x_0$, kan vi omskrive ovenstående til

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Differenskvotienten

Betragt hældningen af sekanten

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Lader vi $\Delta x = x_1 - x_0$, kan vi omskrive ovenstående til

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Denne størrelse kaldes differenskvotienten i x_0. Vi er interesseret i denne størrelse, som Δx nærmer sig 0.

Grænseværdier

Hvis $g(x)$ er en funktion, da skal *grænseværdien*

$$\lim_{x \to a} g(x)$$

forstås som den værdi, $g(x)$ nærmer sig, idet x nærmer sig a (fra en vilkårlig retning). Nogle gange findes grænseværdier, og andre gange gør de ikke.

Eksempler på grænseværdier

- $$\lim_{x \to 0} f(x), \quad f(x) = x + 3.$$

Eksempler på grænseværdier

- $$\lim_{x \to 0} f(x), \quad f(x) = x + 3.$$

- $$\lim_{x \to 0} g(x), \quad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } x < 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \\ 1 & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

Eksempler på grænseværdier

- $$\lim_{x \to 0} f(x), \quad f(x) = x + 3.$$

- $$\lim_{x \to 0} g(x), \quad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } x < 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \\ 1 & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

- $$\lim_{x \to 0} h(x), \quad h(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

Differentialkvotienten

Definition

Lad f være en funktion defineret på et åbent interval (a, b), og lad x_0 ligge i (a, b). Såfremt grænseværdien

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

eksisterer, kaldes denne for *differentialkvotienten* i x_0 og betegnes $f'(x_0)$. $f'(x_0)$ udtales "f mærke af x_0" og kaldes også for den *afledte* af f i x_0. Hvis differentialkvotienten eksisterer i x_0, siger vi, at f er differentiabel i x_0.

Eksempler

- $f(x) = a$ (en konstant funktion).

Eksempler

- $f(x) = a$ (en konstant funktion). $f'(x) = 0$.

Eksempler

- $f(x) = a$ (en konstant funktion). $f'(x) = 0$.
- $f(x) = x^2$.

Eksempler

- $f(x) = a$ (en konstant funktion). $f'(x) = 0$.
- $f(x) = x^2$. $f'(x) = 2x$.

Regneregler: addition

Sætning

Lad f og g være funktioner, der begge er differentiable i x_0. Da gælder

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Regneregler: addition

Bevis: Husk, at funktionen $f + g$ er defineret ved $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

Regneregler: addition

Bevis: Husk, at funktionen $f + g$ er defineret ved $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Vi opstiller differenskvotienten

$$\begin{aligned}\frac{(f+g)(x_0+\Delta x)-(f+g)(x_0)}{\Delta x} &= \frac{f(x_0+\Delta x)+g(x_0+\Delta x)-(f(x_0)+g(x_0))}{\Delta x}\\ &= \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x},\end{aligned}$$

Regneregler: addition

Bevis: Husk, at funktionen $f+g$ er defineret ved $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$. Vi opstiller differenskvotienten

$$\begin{aligned}\frac{(f+g)(x_0+\Delta x)-(f+g)(x_0)}{\Delta x} &= \frac{f(x_0+\Delta x)+g(x_0+\Delta x)-(f(x_0)+g(x_0))}{\Delta x} \\ &= \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x},\end{aligned}$$

og ved at tage grænseværdien $\Delta x\to 0$ på begge sider af lighedstegnet får vi

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

som ønsket.

Regneregler: addition

Bemærkning

Med et fuldstændigt analogt bevis kan man vise, at $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$.

Regneregler: addition

Bemærkning

Med et fuldstændigt analogt bevis kan man vise, at $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$.

Eksempel

Lad $f(x) = x^2 + 5$. Vi ved, at differentialkvotienten af 5 er 0. Vi ved også fra tidligere, at x^2 har differentialkvotienten $2x$. Dermed fås per ovenstående sætning, at $f'(x) = 2x + 0 = 2x$.

Opgaver

Lad os tage en opgavepause, inden vi fortsætter med nogle vigtige eksempler. Arbejd med opgave 1.1 til 1.4.

Program

1. Differentialkvotienten
2. Afledte af vigtige funktioner
3. Regneregler for differentialkvotienter

Polynomier

Før så vi, at $(x^2)' = 2x$. I har også vist i opgaverne, at $x' = 1$. Er der et generelt mønster for polynomier?

Polynomier

Før så vi, at $(x^2)' = 2x$. I har også vist i opgaverne, at $x' = 1$. Er der et generelt mønster for polynomier?

Sætning

Funktionen $f(x) = x^n$ *for et heltal* $n \geq 1$ *har den afledte* $f'(x) = nx^{n-1}$.

Polynomier

Før så vi, at $(x^2)' = 2x$. I har også vist i opgaverne, at $x' = 1$. Er der et generelt mønster for polynomier?

Sætning

Funktionen $f(x) = x^n$ for et heltal $n \geq 1$ har den afledte $f'(x) = nx^{n-1}$.

Eksempel

Lad $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 8x + 10$. Første led har den afledte $5 \cdot 4x^{4-1} = 20x^3$. Andet led har den afledte $3 \cdot 2x^{2-1} = 6x$, mens tredje led har den afledte 8, og sidste led er en konstant, som dermed har den afledte 0. Alt i alt fås

$$f'(x) = 20x^3 - 6x + 8.$$

Andre vigtige funktioner

Sætning

Funktionerne cos *og* sin *er begge differentiable i alle punkter med*

$$\cos'(x) = -\sin(x) \quad \textit{og} \quad \sin'(x) = \cos(x).$$

Andre vigtige funktioner

Sætning

Funktionerne cos *og* sin *er begge differentiable i alle punkter med*

$$\cos'(x) = -\sin(x) \quad \textit{og} \quad \sin'(x) = \cos(x).$$

Et bevis bygger på nogle fundamentale resultater for grænseovergange involverende cosinus og sinus. Se en mere uddybende forklaring i materialet.

Andre vigtige funktioner

Sætning

Funktionerne cos *og* sin *er begge differentiable i alle punkter med*

$$\cos'(x) = -\sin(x) \quad og \quad \sin'(x) = \cos(x).$$

Et bevis bygger på nogle fundamentale resultater for grænseovergange involverende cosinus og sinus. Se en mere uddybende forklaring i materialet.

Sætning

Vi har

$$(e^x)' = e^x \quad og \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Program

Regneregler: produktreglen

Hvordan udregner man differentialkvotienten af et produkt af funktioner?

Regneregler: produktreglen

Hvordan udregner man differentialkvotienten af et produkt af funktioner?

Sætning (Produktreglen)

Lad f og g være funktioner, der begge er differentiable i et punkt x_0. Da gælder

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Regneregler: produktreglen

Hvordan udregner man differentialkvotienten af et produkt af funktioner?

Sætning (Produktreglen)

Lad f og g være funktioner, der begge er differentiable i et punkt x_0. Da gælder

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Vi gennemgår beviset på tavlen. Derefter gennemgår vi et eksempel med $f(x) = x^3 \cos(x)$.

Kvotientreglen

Hvordan differentierer man en brøk af to funktioner?

Kvotientreglen

Hvordan differentierer man en brøk af to funktioner?

Sætning (Kvotientreglen)

Lad f og g være funktioner, der begge er differentiable i punktet x_0. Antag, at $g(x_0) \neq 0$. Da gælder

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Kvotientreglen

Hvordan differentierer man en brøk af to funktioner?

Sætning (Kvotientreglen)

Lad f og g være funktioner, der begge er differentiable i punktet x_0. Antag, at $g(x_0) \neq 0$. Da gælder

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Idéen i beviset minder om den for produktreglen. Vi gennemgår eksemplet $f(x) = \cos(x)/x$.

Kædereglen

Hvordan differentierer man en sammensat funktion, altså en funktion på formen $g(f(x))$?

Kædereglen

Hvordan differentierer man en sammensat funktion, altså en funktion på formen $g(f(x))$?

Sætning (Kædereglen)

Lad f være en funktion, der er differentiabel i punktet x_0, og antag, at g er en funktion, som er differentiabel i punktet $f(x_0)$. Da er sammensætningen $g \circ f$ differentiabel i x_0 med differentialkvotient

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Kædereglen

Hvordan differentierer man en sammensat funktion, altså en funktion på formen $g(f(x))$?

Sætning (Kædereglen)

Lad f være en funktion, der er differentiabel i punktet x_0, og antag, at g er en funktion, som er differentiabel i punktet $f(x_0)$. Da er sammensætningen $g \circ f$ differentiabel i x_0 med differentialkvotient

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Se beviset i materialet. Vi gennemgår eksemplet $f(x) = \sin(4x^2)$.

Opgaver

Resten af workshoppen er opgaveregning. Undervejs skal I ikke tøve med at stille spørgsmål. Opgaverne er 2.1 til 2.8 på side 12 og 13.

Bemærk: Der er nyttige tabeller på side 11.

Skulle nogle blive hurtigt færdige, er der et anvendelsesafsnit omkring optimering i materialet.

Tak for denne gang

Andre arrangementer (foredrag, workshops og andet) i UNF København kan ses her: https://unf.dk/aktiviteter/?department=kbh

Information om vores sommer-sciencecamps kan ses her: https://unf.dk/sciencecamps/