Workshop i differentialregning

Rasmus Frigaard Lemvig (rle@unf.dk)

Ungdommens Naturvidenskabelige Forening København

Dato: 14. september 2023

Introduktion til workshoppen

Velkommen til workshoppen i differentialregning! I den her workshop starter vi med at introducere differentialkvotienten og udlede de mest grundlæggende regneregler herudfra. Vi skal også undervejs igennem en kort konceptuel introduktion til grænseværdi-begrebet. Workshoppen har ét primært mål, nemlig at få forståelsen og redskaberne på plads til at kunne udregne differentialkvotienten for en lang række funktioner. Opgaveregning udgør derfor en stor del af workshoppen. Til slut skal vi se på en typisk anvendelse af differentialregning, nemlig optimering.

Opgaverne til workshoppen har tre sværhedsgrader indikeret med blå prikker, hvor én prik er nemmest og tre er sværest.

1 Differentialkvotienten

1.1 Sekanten

Målet med denne sektion er at introducere den såkaldte *differentialkvotient*. Denne beskriver en funktions ændring i et bestemt punkt. For at kunne gøre dette skal vi dog først have nogle andre begreber på plads.

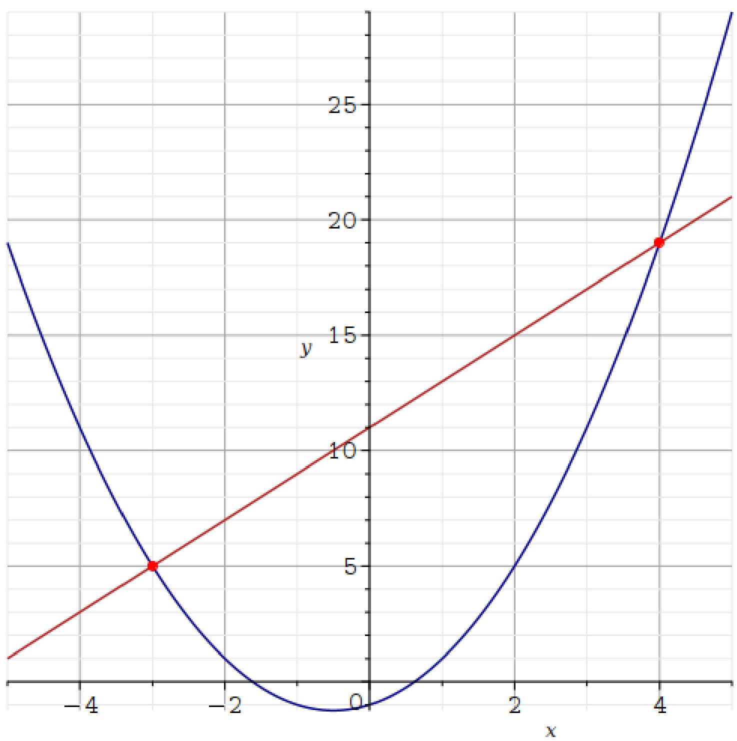
Definition 1.1. Lad en funktion f være defineret på et åbent interval (a, b), og lad to punkter x_0 og x_1 ligge i (a, b). *Sekanten* tilhørende f mellem x_0 og x_1 er den rette linje, der går gennem $f(x_0)$ og $f(x_1)$.

Bemærkning 1.2. Hældningen for sekanten er givet ved

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

som er veldefineret, så længe $x_1 \neq x_0$ (ellers får vi division med nul).

Eksempel 1.3. Betragt funktionen $f(x) = x^2 + x - 1$ og de to punkter $x_0 = -3$ og $x_1 = 4$. Grafen herunder viser funktionen f (blå), punkterne $(x_0, f(x_0))$ og $(x_1, f(x_1))$ (rød) samt sekanten gennem x_0 og x_1 (mørkerød).



Figur 1: Illustration af en sekant (mørkerød) for et andengradspolynomium (blå).

Vi kan bestemme sekanten eksplicit som følger. Hældningen af sekanten er givet ved

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(4) - f(-3)}{4 - (-3)} = \frac{19 - 5}{7} = 2,$$

og vi kan dermed bestemme skæringen med y-aksen b ved at bruge, at vi ved, at sekanten går gennem punktet $(4, f(4)) = (4, 19)$. Betegner vi sekanten med s, får vi ligningen

$$s(4) = 19 \quad \Leftrightarrow \quad 19 = 2 \cdot 4 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 19 - 8 = 11.$$

Dermed har sekanten gennem -3 og 4 forskriften $s(x) = 2x + 11$.

1.2 Differenskvotienten og differentialkvotienten

Lad os se endnu en gang på hældningen af sekanten mellem de to punkter x_0 og x_1:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Denne størrelse kaldes også for *differenskvotienten.* Til tider skriver man ovenstående på en anden måde. Lad $\Delta x = x_1 - x_0$, hvor Δ er det græske bogstav (store) delta (Δ betegner som regel en form for forskel/differens). Vi ser, at $x_1 = x_0 + \Delta x$, og dermed kan vi skrive differenskvotienten som

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

I differentialregning er vi interesseret i at beskrive udviklingen i en funktion i et enkelt punkt. Vi gør dette ved at betragte differenskvotienten og se, hvad den går imod, når Δx nærmer sig 0, svarende til at x_1 nærmer sig x_0. Rent formelt ønsker vi at betragte grænseværdien

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

såfremt denne eksisterer. Inden vi fortsætter diskussionen, vil vi studere nogle eksempler, der involverer grænseværdier.

Eksempel 1.4. Lad os betragte funktionen $g(x) = x + 3$. Vi ønsker at bestemme

$$\lim_{x \to 0} g(x).$$

Vi ser, at når x kommer arbitrært tæt på 0, da vil $x + 3$ nærme sig 3. Dermed er

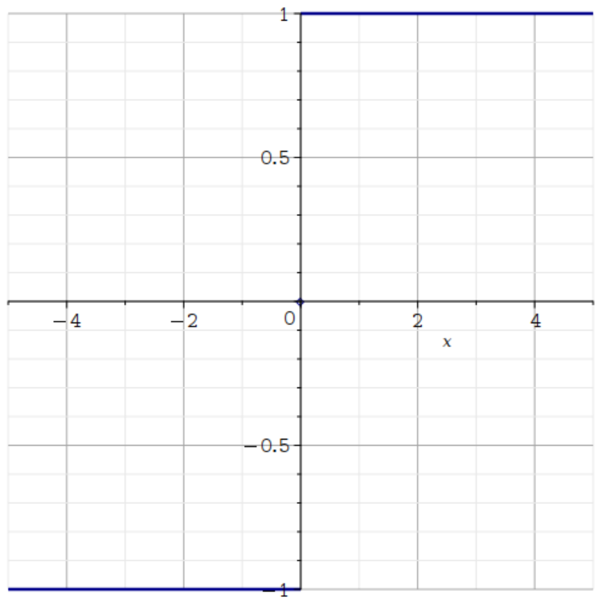
$$\lim_{x \to 0} g(x) = 3,$$

hvilket stemmer med funktionsværdien $g(0) = 3$.

Eksempel 1.5. Betragt gaffelfunktionen

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{for } x < 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \\ 1 & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

Funktionens graf er illustreret i figuren herunder:



Figur 2: Eksempel på en diskontinuert funktion.

I dette tilfælde vil grænseværdien

$$\lim_{x \to 0} g(x)$$

ikke findes. Årsagen er, at funktionen nærmer sig noget forskelligt afhængigt af, hvilken retning, man nærmer sig 0. Kommer man fra højre, bliver grænsen 1, og nærmer man sig fra venstre, bliver grænsen -1.

Eksempel 1.6. Betragt funktionen

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}.$$

I dette tilfælde har vi

$$\lim_{x \to 0} h(x) = 1,$$

fordi funktionen nærmer sig 1 uanset hvilken retning, x nærmer sig 0. Bemærk dog, at $h(0) = 0 \neq 1$. Dermed er en grænseværdi for en funktion ikke altid det samme som at tage funktionsværdien i det punkt.

Med en bedre forståelse for grænseværdier kan vi nu vende tilbage til differenskvotienten og lave følgende definition.

Definition 1.7. Lad f være en funktion defineret på et åbent interval (a, b), og lad x_0 ligge i (a, b). Såfremt grænseværdien

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

eksisterer, kaldes denne for *differentialkvotienten* i x_0 og betegnes $f'(x_0)$. $f'(x_0)$ udtales "f mærke af x_0" og kaldes også for den *afledte* af f i x_0. Hvis differentialkvotienten eksisterer i x_0, siger vi, at f er differentiabel i x_0.

Eksempel 1.8. Lad $f(x) = a$ være en konstant funktion og x_0 et vilkårligt reelt tal. Her er differenskvotienten lig

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{a - a}{\Delta x} = 0.$$

Heraf er det klart, at

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 0.$$

Altså er den afledte funktion af en konstant lig 0. Dette stemmer fint overens med vores intuition, da en konstant funktion ikke har nogen ændring i nogle punkter.

Eksempel 1.9. Betragt $f(x) = x^2$, og lad x_0 være et vilkårligt reelt tal. Vi ønsker at bestemme $f'(x_0)$. Vi opskriver først differenskvotienten

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}.$$

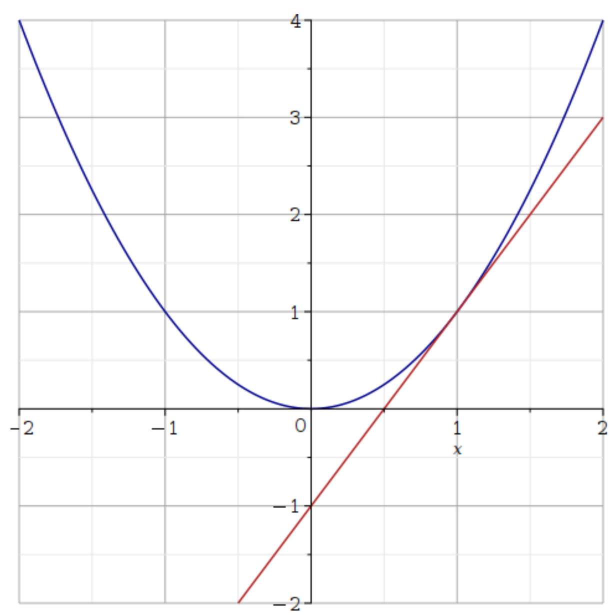
Vi kan nu benytte kvadratsætningerne og få, at ovenstående er lig

$$\frac{x_0^2 + (\Delta x)^2 + 2x_0\Delta x - x_0^2}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^2 + 2x_0\Delta x}{\Delta x} = \Delta x + 2x_0.$$

Til slut skal vi betragte grænseværdien for $\Delta x \to 0$. Ovenstående udtryk ses klart at gå mod $2x_0$ i denne grænseovergang, og dermed har vi

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 2x_0.$$

Herunder ses funktionen f illustreret (blå) med tangenten gennem 1 tegnet ind (rød):



Figur 3: Funktionen $f(x) = x^2$ (blå) med tangentlinjen gennem $(1, f(1))$ tegnet ind (rød).

Det ses, at linjen, som tangerer gennem $(1, f(1))$, har hældning 2, hvilket stemmer overens med, at $f'(1) = 2$. Dette er netop den geometriske tolkning af differentialkvotienten. Den angiver hældningen af grafen i et punkt.

1.3 Regneregler for den afledte funktion

Vi har nu set nogle eksempler på, hvordan man beregner differentialkvotienter direkte ud fra definitionen. Dog er dette kun en plausibel strategi for meget simple eksempler. For mere komplicerede funktioner er det helt essentielt at have en række regneregler på plads. Dem gennemgår vi i dette afsnit.

Sætning 1.10. *Lad f og g være funktioner, der begge er differentiable i x_0. Da gælder*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Bevis. Husk, at funktionen $f+g$ er defineret ved $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$. Vi opstiller differenskvotienten

$$\begin{aligned}\frac{(f+g)(x_0+\Delta x)-(f+g)(x_0)}{\Delta x} &= \frac{f(x_0+\Delta x)+g(x_0+\Delta x)-(f(x_0)+g(x_0))}{\Delta x} \\ &= \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} + \frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x},\end{aligned}$$

og ved at tage grænseværdien $\Delta x \to 0$ på begge sider af lighedstegnet får vi

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

som ønsket. ■

Bemærkning 1.11. Med et fuldstændigt analogt bevis kan man vise, at $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$.

Eksempel 1.12. Lad $f(x) = x^2 + 5$. Vi ved, at differentialkvotienten af 5 er 0. Vi ved også fra tidligere, at x^2 har differentialkvotienten $2x$. Dermed fås per ovenstående sætning, at $f'(x) = 2x + 0 = 2x$.

Selvom den afledte af en sum af funktioner blot er summen af de afledte funktioner hver især, er situationen lidt mere kompliceret for produktet af to funktioner, som nedenstående sætning viser. Det viser sig, at differentialkvotienten af et produkt er lig den første funktion afledt gange den anden bibeholdt plus den første funktion bibeholdt gange den anden funktion afledt.

Sætning 1.13 (Produktreglen). *Lad f og g være funktioner, der begge er differentiable i et punkt x_0. Da gælder*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Bevis. Husk, at funktionen fg er defineret ved $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Vi opskriver differenskvotienten

$$\frac{(fg)(x_0+\Delta x)-(fg)(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}.$$

Det er ikke umiddelbart klart, hvordan vi skal komme videre herfra. Det kræver også et trick at regne videre på ovenstående udtryk, nemlig at vi skal lægge 0 til på en smart måde i tælleren. Vi får idéen at lægge $f(x_0)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0+\Delta x)$ til i tælleren. Da bliver ovenstående lig

$$\frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x)+f(x_0)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} =$$
$$\frac{(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))g(x_0+\Delta x)+f(x_0)(g(x_0+\Delta x)-g(x_0))}{\Delta x}$$
$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}g(x_0+\Delta x)+f(x_0)\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}.$$

Vi bemærker nu, at vi har omskrevet udtrykket til at involvere differenskvotienterne af f og g i x_0 samt $g(x_0 + \Delta x)$ og $f(x_0)$. Idet g er differentiabel i x_0, er g også kontinuert (tænk: man kan tegne g uden at løfte blyanten/kridtet), hvilket medfører

$$\lim_{\Delta x \to 0} g(x_0 + \Delta x) = g(x_0).$$

Tager vi grænsen $\Delta x \to 0$ på begge sider, fås altså

$$f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

hvilket var det, der skulle vises. ∎

Sætning 1.14 (**Kvotientreglen**). *Lad f og g være funktioner, der begge er differentiable i punktet x_0. Antag, at $g(x_0) \neq 0$. Da gælder*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Bevis. Husk, at $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$. Vi opstiller differenskvotienten

$$\frac{(f/g)(x_0 + \Delta x) - (f/g)(x_0)}{\Delta x} = \frac{\frac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0 + \Delta x)}{\Delta x g(x_0)g(x_0 + \Delta x)}.$$

Tricket herfra minder om det fra tidligere. Vi lægger nul til i tælleren på en smart måde, nemlig ved at lægge $f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x)$ til i tælleren. Da bliver differenskvotienten lig

$$\frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0) + f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0 + \Delta x)}{\Delta x g(x_0)g(x_0 + \Delta x)} =$$
$$\frac{(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))g(x_0 + \Delta x) - f(x_0 + \Delta x)(g(x_0 + \Delta x) - g(x_0))}{\Delta x g(x_0)g(x_0 + \Delta x)} =$$
$$\left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} g(x_0 + \Delta x) - f(x_0 + \Delta x)\frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}\right)\frac{1}{g(x_0)g(x_0 + \Delta x)}.$$

Bruges kontinuiteten af f og g i x_0, får vi

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \quad \text{og} \quad \lim_{\Delta x \to 0} g(x_0 + \Delta x) = g(x_0).$$

Tager vi grænseværdien $\Delta x \to 0$ af ovenstående udtryk, får vi altså

$$(f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0))\frac{1}{g(x_0)^2} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Dette konkluderer beviset. ∎

Eksempler på brug af de seneste to regneregler får vi adskillige af i næste afsnit. Vi har nu formuleret og bevist regneregler, som involverer alle basale regneoperationer. Den eneste fundamentale regneregel, vi mangler, er den såkaldte *kæderegel*.

Sætning 1.15 (**Kædereglen**). *Lad f være en funktion, der er differentiabel i punktet x_0, og antag, at g er en funktion, som er differentiabel i punktet $f(x_0)$. Da er sammensætningen $g \circ f$ differentiabel i x_0 med differentialkvotient*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Bemærkning 1.16. Sætningen skal forstås på følgende måde: For at differentiere den sammensatte funktion $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ i et punkt x_0 skal man bestemme $g'(x)$ og indsætte $f(x_0)$ på x's plads. Dernæst ganger man $f'(x_0)$ på.

Bevis. Vi opskriver differenskvotienten

$$\frac{(g \circ f)(x_0 + \Delta x) - (g \circ f)(x_0)}{\Delta x} = \frac{g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0))}{\Delta x},$$

og vi får ideen at gange med 1 på en smart måde. Vi gør dette ved at gange og dividere med $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ i ovenstående. Da bliver differenskvotienten lig

$$\frac{(g \circ f)(x_0 + \Delta x) - (g \circ f)(x_0)}{\Delta x} = \frac{g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0))}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Skriv nu $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Da er differenskvotienten lig

$$\frac{g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0))}{\Delta f} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Kontinuiteten af f i x_0 giver, at

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) - \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0.$$

Ved at bruge, at g er differentiabel i $f(x_0)$, får vi

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0))}{\Delta f} = \lim_{\Delta f \to 0} \frac{g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0))}{\Delta f} = g'(f(x_0)).$$

Altså fås $g'(f(x_0))f'(x_0)$ ved at tage grænseværdien $\Delta x \to 0$ af differenskvotienten, og dermed er beviset fuldført. ∎

Eksempel 1.17. Lad $g(x) = x^2$ og $f(x) = x + 2$. Vi ønsker at bestemme differentialkvotienten af $g(f(x)) = (x + 2)^2$. Vi har $g'(x) = 2x$ og $f'(x) = 1$ (se opgaverne). Dermed er

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = 2f(x) \cdot 1 = 2x + 4.$$

Dette kan også vises ved direkte udregning. Vi har $g(f(x)) = x^2 + 4 + 4x$. Differentieres ledvist, fås præcist samme svar som ovenover.

I næste afsnit skal vi se på differentialkvotienten af en række centrale funktioner. I den forbindelse får vi rig mulighed for at benytte alle de ovenstående resultater.

1.4 Opgaver

• **Opgave 1.1:**
Betragt funktionen $f(x) = x^2 - 4$. Skitsér funktionen og tegn sekanten gennem $x_0 = -1$ og $x_1 = 2$.

•• **Opgave 1.2:**
Vis direkte ud fra definitionen af en differentialkvotient, at $f(x) = ax$ har den afledte $f'(x) = a$.

•• **Opgave 1.3:**
Lad f være en funktion, der er differentiabel i x_0. Vis, at funktionen $g(x) = af(x)$ er differentiabel i x_0 med afledt $g'(x_0) = af'(x)$.

●●● **Opgave 1.4:**
Vis direkte ud fra definitionen af en differentialkvotient, at $f(x) = x^3$ har den afledte funktion $f'(x) = 3x^2$. Vink: Her er kubiksætningerne nyttige: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

2 Eksempler på afledte funktioner

I dette afsnit ser på nogle centrale funktioner og deres afledte.

2.1 Polynomier

Et polynomium er en funktion på formen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

hvor hvert a_i er en konstant. Ønsker vi at differentiere sådan en funktion, kan vi nøjes med at differentiere hvert led og lægge disse afledte sammen jævnfør sætning **??**. Fra opgave 1.3 har vi, at en konstant ganget en funktion ikke ændrer ved den afledte. Altså behøver vi kun at studere en funktion af formen x^n, hvor n er et positivt heltal. Vi har følgende resultat

Sætning 2.1. *Funktionen $f(x) = x^n$ for et heltal $n \geq 1$ har den afledte $f'(x) = nx^{n-1}$.*

Bevis. Beviset bygger på observationen, at $(x_0 + \Delta x)^n$ er lig $x_0^n + nx_0^{n-1}\Delta x +$ (led, der alle har $(\Delta x)^2$ ganget på sig). Den interesserede læser kan slå *Binomialsætningen* op. Dermed er $(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n = nx_0^{n-1}\Delta x +$ (led, der alle har $(\Delta x)^2$ ganget på sig). Når vi opstiller differenskvotienten, deler vi med Δx, og dermed bliver differenskvotienten på formen nx_0^{n-1} + (led, der alle har Δx ganget på sig). Idet vi lader Δx gå mod 0, har vi kun nx_0^{n-1} tilbage som ønsket. ■

Eksempel 2.2. Lad $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 8x + 10$. Første led har den afledte $5 \cdot 4x^{4-1} = 20x^3$. Andet led har den afledte $3 \cdot 2x^{2-1} = 6x$, mens tredje led har den afledte 8, og sidste led er en konstant, som dermed har den afledte 0. Alt i alt fås

$$f'(x) = 20x^3 - 6x + 8.$$

2.2 Trigonometriske funktioner

I dette afsnit ser vi på de trigonometriske funktioner cos og sin. Vi starter med at genkalde de såkaldte *additionsformler*, som vi undlader at bevise.

Sætning 2.3 (**Additionsformlerne**)**.** *Der gælder følgende relationer:*

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\\ \sin(x+y) &= \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y).\end{aligned}$$

Sætning 2.4. *Funktionerne* cos *og* sin *er begge differentiable i alle punkter med*

$$\cos'(x) = -\sin(x) \quad \textit{og} \quad \sin'(x) = \cos(x).$$

Bevis. Vi opstiller differenskvotienten for cos og benytter additionsformlerne:
$$\begin{aligned}\frac{\cos(x_0+\Delta x)-\cos(x_0)}{\Delta x} &= \frac{\cos(x_0)\cos(\Delta x)-\sin(x_0)\sin(\Delta x_0)-\cos(x_0)}{\Delta x}\\ &= \cos(x_0)\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x}-\sin(x_0)\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}.\end{aligned}$$
Vi skal nu benytte to resultater, nemlig
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x}=0 \quad \text{og} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}=1.$$
Tages grænseværdien $\Delta x \to 0$ af differenskvotienten, fås altså grænseværdien $-\sin(x_0)$. Dermed har vi
$$\cos'(x_0) = -\sin(x_0),$$
hvilket beviser den første påstand. Nu undersøges differentialkvotienten af sin. Vi opstiller differenskvotienten og benytter additionsformlerne:
$$\begin{aligned}\frac{\sin(x_0+\Delta x)-\sin(x_0)}{\Delta x} &= \frac{\cos(x_0)\sin(\Delta x)+\sin(x_0)\cos(\Delta x)-\sin(x_0)}{\Delta x}\\ &= \cos(x_0)\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}+\sin(x_0)\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x}.\end{aligned}$$
Benyttes de samme grænseresultater som ovenover, fås $\sin'(x_0) = \cos(x_0)$.

■

Bemærkning 2.5. De to grænseresultater i ovenstående bevis er ikke-trivielle. At vise dem kræver en formel introduktion af cos og sin samt etableringen af nogle centrale uligheder. Derudover kræves en mere formel definition af grænseovergangsbegrebet, som vi ikke kommer ind på her.

Vi er nu klar til at tackle mere komplekse differentiations-problemer.

Eksempel 2.6. Betragt funktionen $f(x) = x^3\cos(x)$. Vi ønsker at bestemme $f'(x)$. Vi bemærker til en start, at $f(x)$ er produktet af $g(x) = x^3$ og $\cos(x)$. Vi ved, at $g'(x) = 3x^2$ og $\cos'(x) = -\sin(x)$. Med produktreglen fås altså
$$f'(x) = g'(x)\cos(x) + g(x)\cos'(x) = 3x^2\cos(x) - x^3\sin(x).$$

Eksempel 2.7. Betragt funktionen $f(x) = \sin(4x^2)$. Vi ønsker at bestemme $f'(x)$. Vi bemærker, at $f(x) = h(g(x))$ hvor $g(x) = 4x^2$ og $h(x) = \sin(x)$. Vi ved, at $h'(x) = \cos(x)$ og $g'(x) = 8x$. Dermed giver kædereglen, at
$$f'(x) = h'(g(x))g'(x) = 8x\cos(4x^2).$$

2.3 Eksponentialfunktionen og den naturlige logaritme

Vi skal nu se på eksponentialfunktionen e^x og den naturlige logaritme $\ln(x)$. Følgende resultat (hvor vi udelader beviset) giver differentialkvotienten til disse to funktioner.

Sætning 2.8. *Vi har*
$$(e^x)' = e^x \quad \textit{og} \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Bemærk, at $(e^x)' = e^x$ fortæller os, at ændringen af eksponentialfunktionen i et vilkårligt punkt er lig funktionsværdien i det punkt. Det er en særdeles interessant egenskab.

Eksempel 2.9. Lad $f(x) = \ln(x^2+1)$. Ved at bruge kædereglen fås
$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}.$$

2.4 Opsummering af regneregler

Funktion	$f'(x)$	Note
$f+g$	$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$	
fg	$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	
f/g	$(f/g)'(x) = (f'(x)g(x) - f(x)g'(x))/g(x)^2$	$g(x) \neq 0$

Figur 4: Tabel over regneregler for differentiation.

$f(x)$	$f'(x)$	Note
a	0	a konstant
x^n	nx^{n-1}	$n \geq 1$ et heltal
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\tan(x)$	$1 + \tan(x)^2$	
e^x	e^x	
$\ln(x)$	$1/x$	

Figur 5: Tabel over nogle vigtige funktioner og deres afledte.

2.5 Opgaver

• **Opgave 2.1:**
Bestem den afledte af følgende polynomier:

1) $6x^2 + 7$.

2) $3x^4 - 7x^3 + 10x - 11$.

3) $3x^7 + 12x^5$.

• **Opgave 2.2:**
Bestem den afledte af følgende funktioner:

1) $4\cos(x) + \sin(x)$.

2) $e^x + 2\sin(x)$.

3) $x^2 + x + \ln(x)$.

•• **Opgave 2.3: Produktregel**
Bestem den afledte af følgende funktioner:

1) $2x^2\cos(x)$.

2) $\cos(x)\sin(x)$.

3) $4x^3e^x$.

4) $\cos(x)e^x$.

5) $x^2\cos(x)\sin(x)$.

6) $\sin(x)\ln(x)$.

•• **Opgave 2.4: Kvotientregel**
Bestem den afledte af følgende funktioner:

1) $\frac{x+1}{x^3}$.

2) $\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

3) $\frac{\cos(x)}{x^2}$.

4) $\frac{\ln(x)}{x^2}$.

5) $\frac{e^x}{4x+1}$.

6) $\frac{x^3}{2e^x+4}$.

••• **Opgave 2.5: Kæderegel**
Bestem den afledte af følgende funktioner:

1) $\cos(x^3)$.

2) $\sin(\cos(x))$.

3) $\cos(e^x)$.

4) $e^{\cos(x)+1}$.

5) $\ln(e^x)$.

6) e^{x^2}.

7) $\sin(e^{2x} + 10x)$.

8) $\cos(x)^7$.

9) $\ln(x)^3$.

10) $\ln(\cos(x))$.

11) $\tan(x^2)$.

●● **Opgave 2.6:**
Genkald, at $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$. Herunder skal $''$ og $'''$ forstås som, at man skal differentiere funktionen hhv. to og tre gange.

1) Vis, at $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2$.

2) Udregn $\tan''(x)$ og $\tan'''(x)$.

●● **Opgave 2.7: Hyperbolske funktioner**
I denne opgave skal vi se på de hyperbolske funktioner. *Hyperbolsk cosinus* og *hyperbolsk sinus* er givet ved hhv.

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{og} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1) Vis, at $\cosh'(x) = \sinh(x)$, og at $\sinh'(x) = \cosh(x)$.

2) Vi definerer *hyperbolsk tangens* til

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Bestem $\tanh'(x)$ og $\tanh''(x)$.

●●● **Opgave 2.8: Blandede øvelser**
Bestem den afledte af følgende funktioner:

1) $\frac{\cos(e^x)+x^2}{\sin(x)}$.

2) $e^{\cos(x)\sin(x)}$.

3) e^{e^x}.

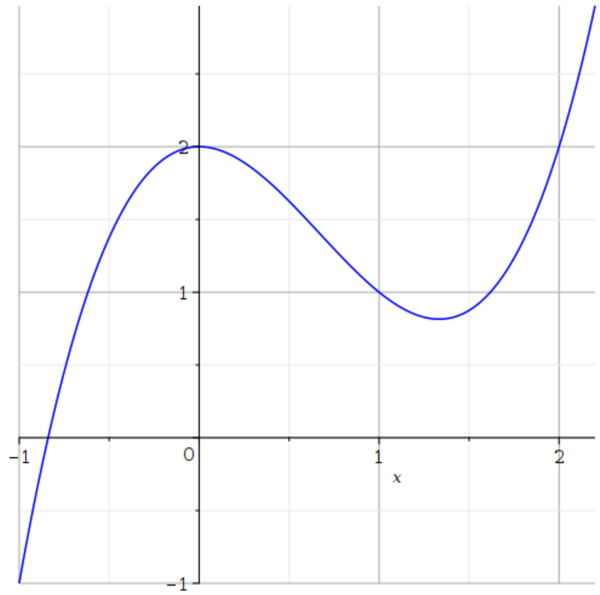
4) $x^3 e^x - \frac{\cos(x)}{x}$.

5) $\cos(x)\tan(x)$.

3 En anvendelse: Optimering

3.1 Maksima og minima

Differentialregning har et utal af anvendelser. Vi skal se på en forholdsvis simpel anvendelse, nemlig optimering. Et eksempel på et optimeringsproblem kunne være, at man ønsker at lave en beholder i en bestemt form, og man ønsker at maksimere volumen ud fra et givet areal. Generelt i et optimeringsproblem, er der en funktion, som man enten skal finde et minimum eller et maksimum af. For at se, hvordan differentialregning indgår i at finde maksima eller minima betragter vi grafen for funktionen $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ som eksempel:



På figuren ser det ud til, at funktionen har to ekstremumspunkter (et generelt begreb for minima og maksima), nemlig et maksimum og et minimum. Hvilke x-værdier har disse punkter? Lad os genkalde, hvad differentialkvotienten fortæller. Differentialkvotienten angiver hældningen i et punkt. I et maksiumum eller et minium vil hældningen være nul, thi hvis den var forskellig fra nul, ville der være et punkt umiddelbart ved siden af, hvor funktionen antog en højere eller lavere værdi. Vi konkluderer, at en x-værdi til et ekstremumspunkt opfylder

$$f'(x) = 0.$$

Lad os finde ekstrema for funktionen f. Vi differentierer og får

$$f'(x) = 3x^2 - 4x.$$

Vi skal dermed løse ligningen $3x^2 - 4x = 0$ for x. Det ses let, at $x = 0$ er en løsning. For at finde en anden løsning antager vi, at $x \neq 0$. Da kan vi dele med x på begge sider af lighedstegnet og få $3x - 4 = 0$, som har løsningen $x = 4/3$. Altså har f ekstrema i $x = 0$ og $x = 4/3$. På grafen er det tydeligt, at $x = 0$ er et (lokalt) maksimum, mens $x = 4/3$ er et (lokalt) minimum. Men hvad nu hvis vi ikke havde grafen til rådighed?

Heldigvis kan vi nemt tjekke, om et ekstremum er et minimum eller et maksimum ved blot at se på den andenafledte $f''(x)$. Den andenafledte angiver hældningen af hældningen eller med andre ord, hvordan ændringen i f udvikler sig. Antag, at x er et minimum. Da vil hældningen gå fra negativ (du går ned ad bakken) til positiv (efter minimummet går du op igen), og dermed er $f''(x)$ *positiv*. Omvendt, hvis x er et maksimum, går du opad mod x og nedad efter x. Altså er $f''(x)$ *negativ*. For vores konkrete funktion f har vi $f''(x) = 6x - 4$. Dermed er $f''(0) = -4 < 0$, og $f''(4/3) = 24/3 - 4 = 2 > 0$. Vores diskussion fortæller os, at 0 burde være et maksimum, mens 4/3 bør være et minimum. Dette er heldigvis også tilfældet.

Lad os opsummere metoden til at finde ekstrema: Givet en to gange differentiabel funktion f (dvs. f og f' er differentiable) findes ekstrema ved at løse ligningen $f'(x) = 0$. Hvis $f''(x) < 0$, er punktet et maksimum, mens $f''(x) > 0$ giver, at punktet er et minimum.

Eksempel 3.1. Antag, at vi har 20 m^2 stål til rådighed, og at vi ønsker at lave en kasse-formet container med så stort volumen som muligt. Højden og bredden skal være ens. Lad x betegne højden/bredden og y længden af kassen. Da er arealet af kassen lig $A(x,y) = 2x^2 + 4xy$, mens volumen er $V(x,y) = x^2y$. Vi ved, at $A(x,y) = 20$. Vi har da ligningen $20 = 2x^2 + 4xy$, som omskrives til $10 = x^2 + 2xy$. Vi vælger at isolere længden y. Vi får da

$$10 = x^2 + 2xy \quad \Leftrightarrow \quad 10 - x^2 = 2xy \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{10 - x^2}{2x}.$$

Vi kan indsætte dette udtryk for y i funktionen for volumen, og dermed kan volumen skrives som en funktion af x alene, nemlig

$$V(x) = x^2 \frac{10 - x^2}{2x} = \frac{1}{2}x(10 - x^2) = 5x - \frac{1}{2}x^3.$$

Vi differentierer denne funktion og får

$$V'(x) = 5 - \frac{3}{2}x^2.$$

Vi løser $V'(x) = 0$ for x:

$$0 = 5 - \frac{3}{2}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 5 = \frac{3}{2}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{10}{3} = x^2.$$

x kan ikke være negativ, så løsningen bliver $x = \sqrt{10/3} \approx 1.826$. Lad os undersøge, om dette er et maksimum for volumen. Vi har

$$V''(x) = -3x,$$

som er negativ for alle positive x-værdier. Dermed er $x = \sqrt{10/3}$ et maksimum. Den maksimale volumen bliver da $V(\sqrt{10/3}) \approx 6.086 m^3$.

3.2 Opgaver

●● **Opgave 3.1:**
Bestem alle lokale maksima og minima for funktionen $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$.

●●● **Opgave 3.2:**
Vi ønsker at lave en indhegning til en have. Vi har 40m hegn til rådighed, og vi ønsker, at haven skal være rektangulær. Bestem den optimale længde og bredde af haven samt det størst mulige areal.