Workshop i differentialligninger

Grundlæggende teknikker og deres anvendelser

Ungdommens Naturvidenskabelige Forening

28-03-2022

Program

1. Introduktion
2. Separation af variable
3. Førsteordens lineære differentialligninger
4. Anvendelser

Program

Hvad er differentialligninger?

Vi er vant til at løse ligninger. Eksempler er

$$x = 3x + 4$$
$$x^2 + 4x - 3 = 0$$

Løsningerne til disse er tal. F.eks. er $x = -2$ løsningen til den første ligning.

Hvad er differentialligninger?

En differentialligning er anderledes. Her er løsningerne *funktioner*. En differentialligning er en ligning i en funktion $y(x)$ og dens afledte.

Hvad er differentialligninger?

En differentialligning er anderledes. Her er løsningerne *funktioner*. En differentialligning er en ligning i en funktion $y(x)$ og dens afledte. Et simpelt eksempel:

$$y'(x) = 2x.$$

Hvad er differentialligninger?

En differentialligning er anderledes. Her er løsningerne *funktioner*. En differentialligning er en ligning i en funktion $y(x)$ og dens afledte. Et simpelt eksempel:

$$y'(x) = 2x.$$

Ved at integrere begge sider fås den *fuldstændige løsning*

$$y(x) = \int 2x dx = x^2 + c,$$

hvor c er en vilkårlig konstant.

Fuldstændige og partikulære løsninger

Hvad hvis vi ønsker et bestemt $y(x)$? Vi kan indføre en *randbetingelse*/*startbetingelse*, f.eks. $y(0) = 0$. Da er vores (entydige) løsning givet ved $y(x) = x^2$.

At gøre prøve

En valid strategi til at løse differentialligninger er at gætte. Har man et bud på en funktion $y(x)$, der opfylder ligningen, kan man indsætte den og tjekke, at den opfylder ligningen. Dette kaldes at *gøre prøve*.

At gøre prøve

En valid strategi til at løse differentialligninger er at gætte. Har man et bud på en funktion $y(x)$, der opfylder ligningen, kan man indsætte den og tjekke, at den opfylder ligningen. Dette kaldes at *gøre prøve*.

- Hvis $y(x) = x^2 + 3$ er $y'(x) = 2x$, så $y(x)$ er en løsning.

At gøre prøve

En valid strategi til at løse differentialligninger er at gætte. Har man et bud på en funktion $y(x)$, der opfylder ligningen, kan man indsætte den og tjekke, at den opfylder ligningen. Dette kaldes at *gøre prøve*.

- Hvis $y(x) = x^2 + 3$ er $y'(x) = 2x$, så $y(x)$ er en løsning.
- Hvis $y(x) = x^3$ er $y'(x) = 3x^2 \neq 2x$, så $y(x)$ er **ikke** en løsning.

Et eksempel

Lad os prøve at løse differentialligningen

$$y'(x) = 3y(x), \quad y(0) = 2.$$

Opgaver

Arbejd med opgave 1.1 og 1.2 på side 3. Skulle I få brug for det, er der en tabel med funktioner og deres afledte og stamfunktioner på samme side.

Program

Vi ser her på differentialligninger på formen

$$f(y(x))y'(x) = g(x).$$

Separation af variable

Vi ser her på differentialligninger på formen

$$f(y(x))y'(x) = g(x).$$

Integrerer vi begge sider,

$$\int f(y(x))y'(x)dx = \int g(x)dx,$$

Separation af variable

Vi ser her på differentialligninger på formen

$$f(y(x))y'(x) = g(x).$$

Integrerer vi begge sider,

$$\int f(y(x))y'(x)dx = \int g(x)dx,$$

giver substitution os, at

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx.$$

Dette gør det nemt at løse for $y(x)$ i mange tilfælde.

Et eksempel

Vi løser

$$y(x)^2 y'(x) = 2x.$$

Et eksempel

Vi løser

$$y(x)^2 y'(x) = 2x.$$

Med separation af variable fås

$$y(x) = \sqrt[3]{x^2 + c}$$

for en konstant c. Det er nok ikke så let at gætte sig til!

Endnu et eksempel

Vi løser

$$\frac{1}{y(x)} = \frac{x - 7x^2}{y'(x)}.$$

Endnu et eksempel

Vi løser

$$\frac{1}{y(x)} = \frac{x - 7x^2}{y'(x)}.$$

Svaret er

$$y(x) = Ce^{\frac{x^2}{2} - \frac{7}{3}x^3}$$

for en konstant $C > 0$.

Opgaver

Arbejd med opgave 2.1 til 2.13. Der er mange opgaver. I når så langt, I når!

Program

1. Introduktion
2. Separation af variable
3. Førsteordens lineære differentialligninger
4. Anvendelser

Førsteordens lineære differentialligninger

Vi er interesseret i differentialligninger af formen

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x),$$

hvor f og g er velkendte (kontinuerte) funktioner. Vi har heldigvis en formel til at løse disse ligninger.

Sætning (Panserformlen)

Lad f og g være kontinuerte funktioner og F en stamfunktion til f. Da er den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$$

givet ved

$$y(x) = e^{-F(x)} \left(\int e^{F(x)} g(x) dx + c \right)$$

for en konstant c.

Et eksempel

Lad os løse

$$y'(x) + 3xy(x) = x.$$

med panserformlen.

Et eksempel

Lad os løse

$$y'(x) + 3xy(x) = x.$$

med panserformlen. Vi får

$$y(x) = \frac{1}{3} + ce^{-\frac{3x^2}{2}}.$$

Panserformlen genbesøgt

Hvad hvis vi havde en randbetingelse? Følgende version af panserformlen klarer den situation.

Panserformlen genbesøgt

Hvad hvis vi havde en randbetingelse? Følgende version af panserformlen klarer den situation.

Sætning (Panserformlen med randbetingelse)

Lad f og g være kontinuerte funktioner og a og b reelle tal. Da eksisterer der en unik løsning til differentialligningen

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x),$$

sådan at $y(a) = b$. Løsningen er givet ved

$$y(x) = e^{-\int_a^x f(t)dt}\left(\int_a^x g(t)e^{\int_a^t f(s)ds}dt + b\right).$$

Et eksempel med randbetingelse

Vi løser

$$y'(x) - 3y(x) = e^{2x}, \quad y(0) = 0.$$

Et eksempel med randbetingelse

Vi løser

$$y'(x) - 3y(x) = e^{2x}, \quad y(0) = 0.$$

Med panserformlen fås den partikulære løsning

$$y(x) = e^{3x}(1 - e^{-x}).$$

Opgaver

Arbejd med 3.1 til 3.7. Spørg endelig, hvis I har brug for vink!

Program

Kemiteknik

Pension

Og atter så jeg under solen, at hurtigløberen ikke er herre over løbet eller heltene over kampen, ej heller de vise over brødet, ej heller de kløgtige over rigdom, ej heller de kloge over yndest, men alle er de bundne af tid og tilfælde.

- Prædikeren 9:11

Pension

Vi skal nu se på anvendelsen af differentialligninger i en simpel pensionsmodel.

Pension

Vi skal nu se på anvendelsen af differentialligninger i en simpel pensionsmodel. De matematiske størrelser i modellen er (t er tid):

- *Reserven* $V(t)$.
- *Præmieraten* $\pi(t)$.
- *Ydelsesraten* $b(t)$.
- *Dødelighedsintensiteten* $\mu_x(t)$ (x er alderen ved kontraktens start).
- *Den korte rente* $r(t)$.

Thieles differentialligning

Thieles differentialligning relaterer de ovenstående størrelser således:

$$V'(t) = \pi(t) - b(t)\mu_x(t) + (r(t) + \mu_x(t))V(t).$$

Thieles differentialligning

Thieles differentialligning relaterer de ovenstående størrelser således:

$$V'(t) = \pi(t) - b(t)\mu_x(t) + (r(t) + \mu_x(t))V(t).$$

Har ligningen en randbetingelse?

Thieles differentialligning

Thieles differentialligning relaterer de ovenstående størrelser således:

$$V'(t) = \pi(t) - b(t)\mu_x(t) + (r(t) + \mu_x(t))V(t).$$

Har ligningen en randbetingelse? Ja! Vi har

$$V(n) = b(n),$$

hvor $b(n)$ er en eventuel klumpbetaling til tid n. Er der ikke sådan en, har vi $V(n) = 0$. Lad os løse Thieles differentialligning!

Reserven

Vi har fra panserformlen, at

$$V(t) = \int_t^n (b(s)\mu_x(s) - \pi(s))e^{-\int_t^s r(u)+\mu_x(u)du} ds + b(n)e^{-\int_t^n r(s)+\mu_x(s)ds}.$$

Bemærk *diskonteringsfaktoren*

$$e^{-\int_t^s r(u)+\mu_x(u)du}.$$

Et eksempel: Ren oplevelsesforsikring

Kontrakt: Til tid n får kunden udbetalt 1 af selskabet, såfremt kunden stadig lever. Der indbetales en løbende præmie med konstant rate π.

Et eksempel: Ren oplevelsesforsikring

Kontrakt: Til tid n får kunden udbetalt 1 af selskabet, såfremt kunden stadig lever. Der indbetales en løbende præmie med konstant rate π. Vi har $b(n) = 1$ og $b(t) = 0$ for $0 \leq t < n$.

Et eksempel: Ren oplevelsesforsikring

Kontrakt: Til tid n får kunden udbetalt 1 af selskabet, såfremt kunden stadig lever. Der indbetales en løbende præmie med konstant rate π. Vi har $b(n) = 1$ og $b(t) = 0$ for $0 \leq t < n$. Reserven er

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_t^n -\pi e^{-\int_t^s r(u)+\mu_x(u)du} ds + e^{-\int_t^n r(s)+\mu_x(s)ds} \\ &= -\pi \int_t^n e^{-\int_t^s r(u)+\mu_x(u)du} ds + e^{-\int_t^n r(s)+\mu_x(s)ds}. \end{aligned}$$

Ratepension

Kontrakt: Fra tid 0 til m (pensionering) indbetaler kunden præmie med konstant rate π. Fra tidspunkt m til n (udløb) udbetaler selskabet ydelse med konstant rate b, så længe kunden er i live.

Ratepension

Kontrakt: Fra tid 0 til m (pensionering) indbetaler kunden præmie med konstant rate π. Fra tidspunkt m til n (udløb) udbetaler selskabet ydelse med konstant rate b, så længe kunden er i live. For $t < m$ er reserven

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_t^m -\pi e^{-\int_t^s r(u)+\mu_x(u)du} ds + \int_m^n b\mu_x(s) e^{-\int_t^s r(u)+\mu_x(u)du} \\ &= -\pi \int_t^m e^{-\int_t^s r(u)+\mu_x(u)du} ds + b \int_m^n \mu_x(s) e^{-\int_t^s r(u)+\mu_x(u)du}. \end{aligned}$$

For $m < t \leq n$ er reserven

$$b \int_t^n \mu_x(s) e^{-\int_t^s r(u)+\mu_x(u)du}.$$