UNF Naturfagsweekend 2021

UNF København og UNF Lyngby

Faglige:

Rasmus Frigaard Lemvig	rle@unf.dk
Marie Stuhr Kaltoft	mark@unf.dk
Erik Søndergård Gimsing	esg@unf.dk
Frederick Aleksander Nilsen	fran@unf.dk
Louie Ray Eistrup Juhl	loue@unf.dk
Andreas Mosbæk Jensen	amj@unf.dk
Knut Ibæk Topp Lindenhoff	knut@unf.dk
Marie Murmann Kragh	mmk@unf.dk
Mette Kjærgaard Thorup	mkth@unf.dk
Robert Garbrecht Larsen	roe@unf.dk
Niels Anders Lyngsø Bærentzen	nalb@unf.dk
Sofie Helene Bruun	shb@unf.dk
Jacob Mejlsted	jme@unf.dk
Claudia Charlott Lassen	ccl@unf.dk
Charlotte Høy Andersen	chan@unf.dk

Ungdommens Naturvidenskabelige Forening

Kompendium til UNF Naturfagsweekend 2021

Kompendiet er skrevet af Rasmus Frigaard Lemvig, Marie Stuhr Kaltoft, Erik Søndergård Gimsing, Frederick Aleksander Nilsen, Louie Ray Eistrup Juhl, Andreas Mosbæk Jensen, Knut Ibæk Topp Lindenhoff, Marie Murmann Kragh, Mette Kjærgaard Thorup, Robert Garbrecht Larsen, Niels Anders Lyngsø Bærentzen, Sofie Helene Bruun, Jacob Mejlsted, Claudia Charlott Lassen og Charlotte Høy Andersen. Kompendium er trykt i januar 2021,

Layout: Esben Skovhus Ditlefsen på forarbejde af Niels Jakob Søe Loft og Mick Althoff Kristensen.

Opsætning/TEXnisk ansvarlig: Morten Raahauge Bastholm.

Indhold

Introduktion

Velkommen til det faglige kompendium! Kompendiet er bygget op af fem kapitler, som dækker de fem forløb, der er på campen. Hvert kapitel er udarbejdet af de faglige teams for hvert område. De samme teams står også for undervisningen på campen, hvor kompendiet benyttes som det primære undervisningsmateriale. Kompendiet er dog også velegnet til selvstudie. Alle os faglige ønsker jer god fornøjelse med campen!

Derudover ønsker vi at rette en stor tak til Next Sukkertoppen Gymnasium, Haldor Topsøe A/S, DUFs lokalforeningspulje og Tuborgfondet for at muliggøre campen. Der står mere information om sponsorerne for campen bagerst i kompendiet.

Kapitel 1

Matematik

1.1 Introduktion

Velkommen til matematikforløbet på Naturfagsweekend! Inden vi springer ud i hovedemnet for forløbet, vil vi gerne give en lille introduktion til, hvad matematik er for en videnskab. Hvad tænker du på, når du hører ordet ”matematik”? Du tænker sikkert på regning med tal, optegning af figurer med lineal eller passer osv. Men det er faktisk slet ikke essensen i matematikken. Matematikere er ofte slet ikke gode til regning! Matematikere er til gengæld gode til at tænke abstrakt og løse problemer med meget specifikke værktøjer. Det er i arbejdet med udviklingen af disse værktøjer, at det sjove og interessante ved matematikken fremkommer. Derudover har matematik også en filosofisk side. Herunder har vi forsøgt at give en beskrivelse af, hvad matematik er for os.

Hvad er matematik for os?

Marie

I modsætning til de andre videnskaber, så kan man altid stole på de resultater, som vi finder i matematik. Jeg har altid været utrolig interesseret i naturvidenskab og specielt matematik. Da jeg selv gik i folkeskole var jeg overbevist om, at jeg ville læse fysik, men senere gik det op for mig, at det faktisk var det matematiske, der primært interesserede mig ved fysikken. Det var netop denne sikkerhed ved matematikken, som jeg fandt fascinerende. En sikkerhed som jo ikke findes på samme måde andre steder. Når jeg generelt tænker på matematik, så tænker jeg ikke længere på det, som man laver i folkeskolen eller gymnasiet for den sags skyld. Jeg tænker på det, som en abstrakt måde at angribe problemer på. I forhold til talteori, som jo er vores emne i år, så synes jeg, at det er enormt fascinerende, fordi der er spændende indgangsvinkler ligegyldigt hvor langt man er i sit uddannelsesforløb. Talteori er en oldgammel disciplin, som stadig bliver forsket i på højeste plan i dag. Så det kan være spændende, hvis man går i 7. klasse, og hvis man går på universitetet. Det, synes jeg, er enormt fascinerende! Hvis man er til historie, så er talteori også et historisk meget interessant emne, da det har rødder meget langt tilbage i tiden.

Erik

Den korte version er, at matematik er hvad matematikere laver. Det vil sige, der er som så ikke nogle regler for, hvad der er matematik, men derimod en række krav til den metode, der anvendes i arbejdet. Det skal være logisk, helt logisk. Det skal være bevisbart sandt, det vil sige du skal kunne lave et argument, der er overbevisende og sandt. Så matematik er en metode til at tænke over ting, hvor man tager sin ide og gør den abstrakt og logisk, og derefter undersøger den ved at argumentere for diverse egnskaber. På den måde er matematik ikke en empirisk videnskab, men heller ikke humaniora, da alt hvad matematik kommer frem til er utvetydig sandt givet nogle antagelser. Det er hvad jeg nyder ved det, jeg kan tænke over nogle ting jeg finder interessante og være helt sikker på, at det jeg finder ud af er sandt. Det jeg bedst kan lide er at omsætte et spørgsmål jeg har til matematik, og så finde værktøjer til at svare på det.

Rasmus

Matematik for mig er en abstrakt videnskab, hvor fremgangsmåden er meget grundig argumentation. Man kan sige, at vi laver beviser, hvor man i naturvidenskab laver forsøg. Når noget i matematik er bevist, kan man være helt sikker på, at det er sandt. Her adskiller matematik sig fra f.eks. fysik og biologi, hvor nye forsøg kan ændre hele videnskaben, og en masse ting må gøres om. Jeg betragter det at arbejde med matematik som, at vi laver nye værktøjer, der kan indgå i mange forskellige sammenhænge.

Selve forløbet

Hvorfor emnet talteori? Talteori er en disciplin, der stammer helt tilbage fra oldtiden. I lang tid var det et emne, som matematikere beskæftigede sig med af ren interesse, men i dag er talteori også helt uundværligt for ikke-matematikere. Faktisk er der mange ting i jeres hverdag, som I tager for givet, der hviler på talteori! Det er alt lige fra IT-sikkerhed og kryptering til opbygningen af computere, ISBN for bøger, stregkoder, data-analyse og statistik. Og sidst, men ikke mindst, er talteori rigtig sjovt!

Hvad skal I få ud af forløbet? Vi håber naturligvis på, at I bliver klogere, men det er faktisk vigtigere, at I udvider jeres horisont og opdager, at matematik er langt mere end bare regning. Synes du ikke, at matematik er det sjoveste fag i dagligdagen, kan faget stadig være noget for dig! Den eneste ting, du skal kunne fra starten i dette forløb er at lægge tal sammen, og så skal du være nysgerrig på at lære noget nyt.

Vi starter med en introduktion til de mest grundlæggende regneregler. En del af dette kender I nok i forvejen, men det er blot for at sikre, at vi er på samme side, inden vi dykker ned i talteori. Vi kommer derefter til at arbejde med primtal, som er en vigtig type heltal, I sikkert også har hørt om. Så går vi videre til største fælles divisorer, hvor vi vil vise en algoritme til at udregne disse. Til slut vil vi arbejde med såkaldt modulær aritmetik, der er en ny måde at regne med tal på, som er nyttig i mange sammenhænge. Vi kommer til at gennemgå en del matematiske resultater undervejs, men vi forventer på ingen måde, at I forstår alle beviserne, og vi kommer heller ikke til at lave dem alle i forløbet. I er dog altid velkomne til at spørge ind til dem.

1.2 Grundlæggende egenskaber og regneregler

I dette afsnit vil vi opsummere og introducere nogle grundlæggende egenskaber, som tal kan have. Det bliver vigtigt at kunne gange tal sammen, men det er ikke vigtigt, at I kan gøre det i hovedet, så her er der en gangetabel, som I kan gøre brug af, hvis det bliver nødvendigt.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Potenser

Som I kan se er diagonalen i gangetabellen farvet en anden farve end resten af tallene. Den grønne farve markerer kvadrattallene. Et *kvadrattal* er et tal, som man kan tage kvadratroden (se nedenunder) af uden at få et decimaltal (kommatal). Det er altså resultatet af et tal ganget med sig selv. Dette kalder vi også et tal i anden potens. For eksempel er $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$. For en generel *potens* betyder a^m, at tallet a er ganget med sig selv m gange. Vi siger, "a i m'te" eller "a i m'te potens". Hvis vi valgte $a = 2$ og $m = 3$, ville vi altså have regnestykket $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Vi skal ofte gange potenser sammen. Da gælder følgende regneregler:

Regneregel 1.2.1.

$$
\begin{aligned}
a^m a^n &= a^{m+n} & \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \\
(a^m)^n &= a^{mn} & a^m b^m &= (ab)^m \\
\frac{a^m}{b^m} &= \left(\frac{a}{b}\right)^m & a^{-m} &= \frac{1}{a^m}
\end{aligned}
$$

Bemærkning 1.2.2. Vi har, at $a^0 = 1$ for alle $a \neq 0$. Dette kan ses ved, at $a^0 = a^{1-1} = a^1/a^1 = 1$.

Kvadratrødder (og m'te rødder)

Kvadratroden af et tal a er et andet tal b, sådan at $b^2 = a$. Vi betegner $b = \sqrt{a}$. F.eks. er $\sqrt{9} = 3$, fordi $3^2 = 9$. Dog kan en kvadratrod af 9 også være -3, da $(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = 9$. Kvadratrod kan ses som en form for omvendt operation til at tage et tal i anden. Dog skal man passe lidt på mht. fortegn. F.eks. er $4^2 = 16 = (-4)^2$, så kvadratroden af 16 kan være både 4 og -4. For at undgå tvetydighed fortrækker vi derfor altid den positive rod, det vil sige vi siger $\sqrt{16} = 4$. Vi kan generalisere til m'te rødder ved at lade $b = \sqrt[m]{a}$ være et tal, der opfylder $b^m = a$. I tilfældet $m = 3$, kalder vi sådan et tal for *kubikroden* af a, mens $m = 2$ blot er kvadratroden fra før. Vi har også en række regneregler for m'te rødder:

Regneregel 1.2.3.

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b} \qquad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \qquad \sqrt[-m]{a} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}}$$

Vi kommer dog ikke til at benytte disse regler så meget i de kommende afsnit. Så vær ikke bange hvis de er forvirrende.

Parenteser og kvadratsætninger

Når vi regner, så ved vi, at gange og dividere kommer før plus og minus. Hvis vi vil ændre på rækkefølgen, som vi regner noget ud i, så bruger vi parenteser. For eksempel er $2 \cdot 2 + 4 = 8$, men $2 \cdot (2 + 4) = 12$. Den sidste udregning kan man også lave på en anden måde:

$$2 \cdot (2 + 4) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 4 + 8 = 12$$

Her anvendte vi *den distributive lov*. Den kan formuleres mere generelt:

Regneregel 1.2.4 (Den distributive lov)**.** *For tallene a, b og c gælder, at*

$$\begin{aligned} (a + b)c &= ac + bc \\ c(a + b) &= ca + cb \end{aligned}$$

Vi kan også gange parenteser sammen. For eksempel er $(1 + 2)(3 + 4) = 3 \cdot 7 = 21$. Hvis vi ville, så kunne vi også bruge den distributive lov i dette eksempel:

$$(1 + 2)(3 + 4) = 1(3 + 4) + 2(3 + 4) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 4 + 6 + 8 = 21$$

Hvis vi ganger en parentes med sig selv, så svarer det til at sætte parentesen i anden potens. Dette kaldes generelt for kvadratsætningerne:

Regneregel 1.2.5 (Kvadratsætningerne)**.** *For tallene a og b gælder følgende:*

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \\ (a - b)^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Bevis. Vi beviser regel 1 og 3, mens regel 2 overlades som en øvelse (se opgave 1.2.13). Vi bruger de distributive love og udregner:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) = (a + b)a + (a + b)b \\ &= a^2 + ba + ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab \end{aligned}$$

Dette beviser den første regel. For at vise den tredje regel bruges en lignende udregning:

$$\begin{aligned} (a + b)(a - b) &= (a + b)a + (a + b)(-b) = a^2 + ba + a(-b) + b(-b) \\ &= a^2 + ba - ab - b^2 = a^2 - b^2 \end{aligned}$$

■

Eksempel 1.2.6. Hvis vi vælger $a = 3$ og $b = 4$, så har vi per 1.2.5, at

$$\begin{aligned} (3 + 4)^2 &= 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 9 + 16 + 24 = 49 \\ (3 - 4)^2 &= 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 = 9 + 16 - 24 = 1 \\ (3 + 4)(3 - 4) &= 3^2 - 4^2 = 9 - 16 = -7 \end{aligned}$$

○

Ligninger og uligheder

I dette afsnit skal vi kort gennemgå ligninger og uligheder samt nogle simple regneregler for disse. Lad os se på den nok mest simple ligning:

$$x = y$$

Hvad kan vi gøre med denne? Vi kan f.eks. gange begge sider med et tal a forskelligt fra 0 (at gange med 0 er uinteressant):

$$ax = ay$$

Vi kan lægge et vilkårligt tal b til på begge sider:

$$ax + b = ay + b$$

Hovedreglen er, at **man gør det samme på begge sider af ligningen**. Lægger man et tal til på den ene side, så lægger man det også til på den anden side osv. Vi kan også prøve at arbejde den anden vej for at komme tilbage til den ligning, som vi startede med. Vi trækker b fra på begge sider:

$$ax + b - b = ay + b - b \quad \text{dvs.} \quad ax = ay$$

Og fordi a ikke er lig 0, så kan vi dele begge sider med a:

$$\frac{ax}{a} = \frac{ay}{a} \quad \text{dvs.} \quad x = y$$

Idet ethvert tal (bortset fra 0) divideret med sig selv giver 1. Lad os tage et konkret eksempel, hvor vi benytter disse regneregler:

Eksempel 1.2.7. Vi ønsker at finde x i ligningen $5x + 7 = -3$. Vi kan trække 7 fra på begge sider og få $5x + 7 - 7 = -3 - 7$, som vi forsimpler til $5x = -10$. Deler vi begge sider med 5 ser vi, at $x = -2$. Det er altid en god idé at tjekke, om ens løsning til en ligning fungerer. Lader vi $x = -2$, så vil $5 \cdot (-2) + 7 = -10 + 7 = -3$, som ønsket. ◦

Eksempel 1.2.8. Lad os løse ligningen $4x = -3x + 21$ for x. Først lægger vi $3x$ til på begge sider og får $4x + 3x = -3x + 3x + 21$, som forsimples til $7x = 21$. Deler vi med 7 på begge sider, fås $\frac{7x}{7} = \frac{21}{7}$, dvs. $x = 3$. ◦

Eksempel 1.2.9. Lad os finde en løsning til ligningen $4x^2 + 16x + 16 = 0$. Det kan umiddelbart se svært ud at løse sådan en ligning, men vi kan faktisk bruge en af kvadratsætningerne. Vi ser, at $(2x + 4)^2 = (2x)^2 + 4^2 + 2 \cdot 2x \cdot 4 = 4x^2 + 16x + 16$. Vores oprindelige ligning bliver altså $(2x + 4)^2 = 0$. Vi skal altså "bare" finde et tal x, så $2x + 4 = 0$ (dette kaldes *nulreglen*). Denne ligning er en del lettere at løse (gør det!), og vi finder, at $x = -2$ løser vores oprindelige ligning. ◦

Lad os nu gennemgå uligheder. Først lidt notation. $<$ og $>$ betegner henholdsvis større end og mindre end. F.eks. er 5 større end 4, så her skriver vi $4 < 5$. $\leq$ og $\geq$ betegner henholdsvis mindre end eller lig med og større end eller lig med. Igen har vi, at $4 \leq 5$, da 4 jo er mindre end eller lig 5. Vi har også, at $5 \leq 5$, men IKKE $5 < 5$. En ulighed er blot et udtryk, hvor mindst et af symbolerne $<, >, \leq, \geq$ indgår. Vi siger, at $<$ og $>$ er *skarpe* (eller *strenge*) uligheder. Lad os se på en simpel en af slagsen:

$$x < y$$

Altså y er (skarpt) større end x. Uligheden holder stadig, hvis vi lægger et tal, a, til på begge sider:

$$x + a < y + a$$

Nu kunne man tro, at alle reglerne for ligninger også gælder for uligheder. F.eks. at vi kan gange uligheden med et tal b på begge sider og få $bx < by$. Men det er ikke altid rigtigt!

F.eks. hvis $x = 4$ og $y = 5$, da er $x < y$. Lad $b = -2$, da får vi $bx = -8 > -10 = by$, så uligheden vender. Generelt gælder der reglen:

$$x < y \quad \text{medfører} \quad \begin{cases} bx < by & \text{hvis } b > 0 \\ bx > by & \text{hvis } b < 0 \\ bx = by & \text{hvis } b = 0 \end{cases}$$

Hvilket blot skal forstås som, at uligheden vender, hvis b er negativ, og at tal, der ganges med 0, selvfølgelig altid bliver 0. Overvej, hvorfor uligheden vender. Det er en god ide at regne på nogle eksempler.

Eksempel 1.2.10. Lad os prøve at simplificere uligheden $x + 6 > -4$. Trækker vi 6 fra på begge sider, får vi, at $x + 6 - 6 > -4 - 6$, som kan forkortes til $x > -10$. Altså skal x være strengt større end -10. ◦

Eksempel 1.2.11. Vi har uligheden $x^2 \geq 0$. Hvilke tal x opfylder denne ligning? Hvis x er positiv eller 0 gælder ligningen i hvert fald (hvorfor?). Hvad hvis x er negativ? Eftersom et negativt tal ganget med et negativt tal giver et positivt tal (husk, at minus gange minus giver plus), så vil $x \cdot x = x^2 \geq 0$ for alle negative x. Vi konkluderer, at $x^2 \geq 0$ holder for alle tal. Det præcist samme sker for ulighederne $x^4 \geq 0$, $x^6 \geq 0$ osv. Hvorfor? ◦

Andengradsligninger

I eksempel 1.2.9 var vi heldige, at vores ligning $4x^2 + 16x + 16 = 0$ kunne omskrives til en meget mere overskuelig form ved brug af kvadratsætningerne. Dette er ikke altid tilfældet, men der findes en generel formel til at løse ligninger af denne form. Ligninger på formen $ax^2 + bx + c = 0$ kaldes *andengradsligninger*, fordi den højeste potens af den ubekendte x er lig 2.

Løsning af andengradsligninger

Der findes enten 0, 1 eller 2 løsninger til denne type ligning. Definér *diskriminanten* D ved $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$. Hvis $D > 0$ findes to løsninger, hvis $D = 0$ findes præcis én løsning, og hvis $D < 0$ findes ingen løsning. Løsninger kan findes med denne formel:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \tag{1.1}$$

Den ene løsning findes ved at lade $\pm$ være $+$, mens den anden findes ved at lade $\pm$ være $-$.

Eksempel 1.2.12. Vi løser ligningen $x^2 + 5x - 14 = 0$ for x. Vi udregner diskriminanten til at være $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14) = 25 + 56 = 81$. Vi ser, at $\sqrt{D} = 9$. Løsningerne udregnes til:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 9}{2}$$

Lader vi $\pm$ være $+$, får vi løsningen $(-5 + 9)/2 = 4/2 = 2$. Den anden løsning er $(-5 - 9)/2 = -14/2 = -7$. De to løsninger er altså 2 og -7. ◦

Opgaver til Grundlæggende egenskaber og regneregler

• **Opgave 1.2.1:**
Udregn 2^3 og 3^3. Brug dette til at udregne 6^3. [Vink: $6 = 3 \cdot 2$]

• **Opgave 1.2.2:**
Udregn:
1) 7^2 og 7^4
2) $\left(\frac{1}{5}\right)^3$
3) 2^{-4}

• **Opgave 1.2.3:**
Udregn:
1) $\sqrt{25}$
2) $\sqrt{36}$
3) $\sqrt{100}$
4) $\sqrt[3]{27}$
5) $\sqrt[5]{32}$
6) $\sqrt[3]{125}$

• **Opgave 1.2.4:**
Som regel giver m'te rødder af et heltal eller en brøk ikke et heltal eller en brøk. Ofte bliver det et (ikke så pænt) decimaltal. Udregn følgende med lommeregner:
1) $\sqrt{2}$
2) $\sqrt{22}$
3) $\sqrt[3]{13}$
Du behøver ikke at skrive alle cifrene efter kommaet!

•• **Opgave 1.2.5:**
Brug regneregel 1.2.3 til at forklare, hvorfor omskrivningerne herunder er korrekte:
1) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ [Vink: $8 = 4 \cdot 2$]
2) $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
3) $\sqrt[3]{108} = 3\sqrt[3]{4}$ [Vink: $108 = 27 \cdot 4$]

•• **Opgave 1.2.6:**
Hvad er $(-1)^n$ for et heltal n? [Vink: se på tilfældene, hvor n er lige og ulige]

• **Opgave 1.2.7:**
Løs disse ligninger for x:
1) $x + 3 = -3$
2) $5x = -15$
3) $7x + 13 = -3x - 17$

•• **Opgave 1.2.8:**
Løs følgende ligninger: [Vink: brug kvadratsætningerne!]
1) $x^2 + 2x + 1 = 0$
2) $x^2 - 36 = 0$
3) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

• **Opgave 1.2.9:**
Indsæt tallene 23, -44, 100, -13, 18, -1, 0, 7 på de rigtige pladser herunder:

$$\_ \leq \_ \leq \_ \leq \_ \leq \_ \leq \_ \leq \_ \leq \_$$

• **Opgave 1.2.10:**
Indsæt et korrekt uligheds-symbol $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ i udtrykkene herunder:

1) $9 \_ 8$

2) $-69 \_ 458$

3) $10 \_ 10$

4) $-33 \_ -40$

5) $0 \_ -2$

6) $-11 \_ -13$

• **Opgave 1.2.11:**
Hvilke tal x opfylder følgende uligheder?

1) $x + 4 < -3$

2) $3x \leq 6$

3) $-x < 4$

•• **Opgave 1.2.12:**
Hvilke tal x opfylder følgende uligheder?

1) $3x - 2 \leq 5x + 6$

2) $x^2 - 4 > 9$

•• **Opgave 1.2.13:**
Brug de distributive love, regneregel 1.2.4, til at bevise den anden kvadratsætning i regneregel 1.2.5.

•• **Opgave 1.2.14:**
Husk, at 0 er det tal, som opfylder $a + 0 = a = 0 + a$ for alle tal a. Brug de distributive love, regneregel 1.2.4, til at bevise $0 \cdot a = 0$ for alle tal a. [Vink: $0 = 0 + 0$]

•• **Opgave 1.2.15:**
Løs følgende andengradsligninger, hvis det er muligt. Hvis det ikke er muligt, forklar hvorfor. [Vink: Det kan være en ide at bruge formel (1.1)]

1) $x^2 + 4x + 4 = 0$

2) $x^2 + 5x + 6 = 0$

3) $x^2 + 2x + 18 = 0$

••• **Opgave 1.2.16:**
I denne opgave skal vi bevise kubiksætningerne. Du kan følge fremgangsmåden i opgave 1.2.13 og bruge kvadratsætningerne i dine mellemregninger.

1) Vis, at $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

2) Vis, at $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. [Vink: du kan erstatte b med $-b$ i den forrige opgave]

1.3 Primtal

Før vi definerer et primtal, så er det vigtigt, at vi forstår konceptet delelighed.

Definition 1.3.1. Hvis d deler a (dvs. hvis $a = d \cdot n$ for et heltal n), så kalder vi d *divisor* for a. Vi skriver $d \mid a$, hvis d deler a, og $d \nmid a$, hvis d ikke deler a. Vi siger, at d går op i a, og at a er et *multiplum* af d.

Bemærkning. En divisor kaldes også en *faktor*.

Eksempel 1.3.2. Vi ved, at $4 = 2 \cdot 2$. Altså vil $2 \mid 4$ og 4 er et multiplum af 2. ◦

Eksempel 1.3.3. Vi ved også, at $14 = 7 \cdot 2$. Så der findes ikke et helt tal, som ganget med 5 giver 14. Altså vil $5 \nmid 14$. ◦

Vi kan nu definere et primtal.

Definition 1.3.4. Et helt tal $p \geq 2$ kaldes et *primtal*, hvis det ikke har andre divisorer end de trivielle, dvs. ± 1 og $\pm p$.

Et helt tal kaldes et *sammensat tal*, hvis det ikke er et primtal, 0 eller ± 1.

Eksempel 1.3.5. De to mest oplagte primtal er selvfølgelig 2 og 3. Vi kan for eksempel betragte det sammensatte tal $a = 12$. Vi ved, at $2 \mid 12$, så 2 må være en faktor (divisor) i 12. Vi har, at $\frac{12}{2} = 6$, så $a = 12 = 2 \cdot 6$. Vi ved også, at $\frac{6}{2} = 3$, så $a = 12 = 2^2 \cdot 3$. Da 2 og 3 begge er primtal, så er $2^2 \cdot 3$ *primtalsfaktoriseringen* af 12. ◦

Definition 1.3.6. Et tal er *lige*, hvis 2 er en divisor for tallet. Hvis et tal ikke er lige, så er det *ulige*.

Det kan virke nemt at finde ud af om et tal er et primtal eller ej. Det er også tilfældet for små tal, men det er faktisk så svært at finde rigtig store primtal, at det er noget computere arbejder på. Der bliver stadig opdaget beviser for forskellige "typer" af primtal.

Eksempel 1.3.7. Primtal på formen $2^p - 1$, hvor p er et primtal, kaldes *Mersenne-primtal* efter den franske matematiker Marin Mersenne (1588-1648) [1, s. 477].

I skrivende stund (18/2-2021) er det største kendte primtal $2^{82.589.933} - 1$, som har 24.862.048 cifre, hvis det skrives ud. Det blev fundet i 2018 af en computer, som var en del af "The Great Internet Mersenne Prime Search" (på dansk: Den store internet jagt efter Mersenne-primtal) [2]. Som man nok kan gætte ud fra navnet er det største kendte primtal altså et Mersenne-primtal. ◦

Eksempel 1.3.8. p er et *Sophie Germain-primtal*, hvis $2p + 1$ også er et primtal. Da kaldes det tilhørende primtal $2p+1$ et *sikkert primtal*. Disse primtal er opkaldt efter den ligeledes franske matematiker Marie-Sophie Germain (1776-1831) [3]. ◦

Det er altså ikke altid helt nemt at finde ud af om et givent tal er et primtal. Der findes dog et par regneregler for hvorvidt et tal er deleligt med et specifikt primtal. Vi introducerer nogle herunder.

Definition 1.3.9. Tværsummen af et tal er summen af tallets cifre. Den alternerende tværsum er summen af cifrene, men hvor fortegnet skifter ved hvert ciffer i summen.

Eksempel 1.3.10. Tværsummen af 121 er $1 + 2 + 1 = 4$. Den alternerende tværsum af 3142 er $3 - 1 + 4 - 2 = 4$. ◦

Vi genkalder, hvordan vi tal i 10-talssystemet skrives ved at se på et eksempel. Tallet 1726 skrives sådan, fordi det består af 6 1'ere, 2 10'ere, 7 100'ere og 1 tusinde. Eller som en sum:

$$1726 = 1 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 6 \cdot 1 = 1 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

Lemma 1.3.11. *Lad a være et heltal.*

(i) $2 \mid a$*, hvis og kun hvis* a *er et lige tal.*

(ii) $3 \mid a$*, hvis og kun hvis tværsummen af* a *er delelig med 3.*

(iii) $5 \mid a$*, hvis og kun hvis det sidste ciffer i* a *er enten 0 eller 5.*

(iv) $11 \mid a$*, hvis og kun hvis den alternerende tværsum af* a *er delelig med 11.*

Bevis. Regel (i) er blot definitionen af at være lige.

Regel (iii) følger af, at 5 deler 10. Lad $a_k, a_{k-1}, ..., a_1, a_0$ betegne cifrene i et heltal a (læst fra venstre mod højre, så $a = a_k a_{k-1} ... a_0$, når man læser tallet), så $a = a_k \cdot 10^k + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$. Idet 5 generelt deler alle led af formen $a_i \cdot 10^i$, deler 5 a hvis og kun hvis 5 deler a_0, dvs. a_0 er lig 0 eller 5 hvis og kun hvis 5 deler a.

Regel (ii) og (iv) kan vi bevise, når vi har indført modulær aritmetik i slutningen af forløbet. ∎

Den slaviske måde at finde primtal på er ved at udelukke de tal, som ikke er primtal. Da 2 er en divisor for alle lige tal, kan vi for eksempel udelukke de resterende lige tal fra at være primtal. Ønsker vi at undersøge, om n er et primtal, er det dog ikke nødvendigt at tjekke, om alle heltal mindre end eller lig n deler n.

Lemma 1.3.12. p *er et primtal hvis og kun hvis* p *ikke har nogle divisorer mindre end eller lig med* $\sqrt{p}$ *udover* ± 1.

Bemærkning 1.3.13. Hvis vi vil undersøge om n er et primtal, så er det altså nok at tjekke, at alle tal mindre eller lig $\sqrt{n}$ ikke er divisor for n.

Bevis. Hvis p er et primtal, så er de eneste divisorer ± 1 og $\pm p$. Altså har p ingen divisorer mindre end eller lig $\sqrt{p}$ udover ± 1.

Antag p ikke har nogle divisorer mindre end eller lig $\sqrt{p}$ udover ± 1. Antag for modstrid, at p ikke er et primtal. Så er p et sammensat tal, hvorfor $p = a \cdot b$ for to heltal a og b. Da er a og b divisorer for p, så per antagelsen er $\sqrt{p} < a, b$. Men da er $a \cdot b > \sqrt{p}\sqrt{p} = p$, hvilket er en modstrid. Altså må p være et primtal. ∎

Eksempel 1.3.14. Lad os undersøge, om 101 er et primtal. Vi ved, at $\sqrt{100} = 10$, og $11^2 = 121$, så kvadratroden af 101 ligger et sted mellem 10 og 11. Altså er det nok at tjekke, om 101 har nogle divisorer mindre end eller lig 11 (forskellig fra ± 1). Idet hverken $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ eller 11 deler 101 (se på gangetabellen i starten), så må 101 være et primtal. ∘

Lemma 1.3.15 (Euklids lemma). *Lad* a*,* b *og* p *være heltal, og antag, at* p *et et primtal. Hvis* $p \mid ab$ *deler* p *enten* a *eller* b.

Bevis. Se øvelse 1.4.10 i næste kapitel. ∎

Sætning 1.3.16. *Alle heltal forskellig fra* 0*,* 1 *og* -1 *har en unik primtalsfaktorisering.*

Bevis. Det er tilstrækkeligt at vise sætningen for positive heltal, da vi blot kan ændre fortegnet på et negativt tal, faktorisere det og tilføje fortegnet igen efterfølgende. Overbevis dig selv om, at dette gælder.

Vi viser nu, at alle heltal større end 1 kan primfaktoriseres. Lad $n > 1$ være et heltal. Antag, at n *ikke* kan skrives som et produkt af primtal. Vi kan også antage, at n er det mindste heltal, som ikke kan skrives som et produkt af primtal. n kan ikke være et primtal (hvorfor?), så $n = a \cdot b$ for to heltal a, b, der begge er mindre end n og større end 1. Per antagelse må a og b kunne skrives som et produkt af primtal. Men da kan n også skrives som et produkt af primtal, en selvmodsigelse. Vi konkluderer, at der ikke findes nogle positive heltal, der ikke kan skrives som et produkt af primtal.

Vi viser nu unikhed. Antag, at $n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_m = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_k$ for primtal p_i og q_j. Per det foregående lemma må vi have, at p_1 deler ét af primtallene q_1, q_2, ... q_k. Men hvis et primtal deler et andet primtal, må de to primtal være ens. Ergo er p_1 lig én af q_i'erne. For overskuelighedens skyld kan vi antage $p_1 = q_1$, og vi deler begge sider med p_1:

$$p_2 \cdot ... \cdot p_m = q_2 \cdot ... \cdot q_k$$

Gentager vi dette argument igen og igen, ender vi til sidst med, at alle primtallene må være lig hinanden parvis, så opskrivningen for n er unik. ■

Bemærkning 1.3.17. Måske undrede du dig over, at vi blot kunne vælge n som det mindste positive heltal med en bestemt egenskab i beviset. Rent formelt har vi benyttet os af, at de positive heltal er såkaldt *velordnede*. Dette betyder bare, at en ikke-tom samling af positive heltal (altså en "bunke" af forskellige heltal, som indeholder mindst et tal) har et mindste element. Man bør bevise dette, men det har vi ikke udviklet teknikkerne til at gøre i dette forløb. I må derfor gerne tage det for givet.

Eksempel 1.3.18. Lad os primtalsfaktorisere 1092. Vi ser, at tallet er lige, så 2 deler det. Vi får, at $1092 = 2 \cdot 546$. 546 er igen lige, og vi udregner, at $1092 = 2^2 \cdot 273$. 3 deler tværsummen af 273, der jo er 12, og vi udregner $273 = 3 \cdot 91$. $91 = 7 \cdot 13$, så vi får, at primtalsfaktoriseringen er:

$$1092 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$$

○

Vi slutter dette afsnit med et andet vigtigt resultat om primtal. Vi ved, at alle heltal kan skrives som et produkt af primtal, så det er interessant at vide noget om, hvor mange primtal, der findes. Det viser sig, at svaret er uendeligt mange [4, s. 12]:

Sætning 1.3.19. *Der findes uendeligt mange primtal.*

Bevis. Vi kender efterhånden en del primtal, f.eks. 2, 3 og 5. Lad $p_1, p_2, ..., p_n$ betegne de n første primtal. Vi konstruérer nu et nyt primtal ud fra disse. Lad os gange vores n første primtal sammen og lægge 1 til. Per forrige sætning kan dette heltal faktoriseres i primtal $q_1, q_2, ..., q_l$:

$$p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1 = q_1 \cdot q_2 \cdots q_l$$

Hvis en af primtallene på højre side q_i er lig en af primtallene p_j på venstre side, omskriver vi ligningen og får:

$$1 = q_1 \cdot q_2 \cdots q_l - p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$$

Hvis q_i er lig et p_j, vil q_i dele højresiden og dermed venstresiden, som er lig 1. Altså er $q_i = 1$, men 1 er ikke et primtal. Altså kan et q_i umuligt være lig en af primtallene $p_1, p_2, ..., p_n$. Definér p_{n+1} som det mindste af primtallene $q_1, q_2, ..., q_l$. Dermed har vi konstrueret et nyt primtal ud fra de første n. Vi kan gentage denne proces uendeligt mange gange og dermed lave uendeligt mange primtal. Dette færdiggør beviset. ■

Bemærkning 1.3.20. Bemærk, at beviset ovenfor ikke kun viser, at der findes uendeligt mange primtal. Det giver også en konkret procedure til at finde dem. Et bevis af denne type kaldes et *konstruktivt* bevis.

De første primtal, der konstrueres i beviset ovenfor, er:

$$2, 3, 7, 43, 13, 53, 5, 622167, 38709183810571, 139, ...$$

Denne følge kaldes *Euklid-Mullin-følgen*. Det er en formodning, at følgen indeholder samtlige primtal. Dette er dog stadig et ubesvaret spørgsmål [4, s. 12].

Anvendelser af primtal

Primtal er ikke kun interessante for matematikere. De er også utroligt nyttige i "den virkelige verden". Specielt bruges de inden for *kryptering*. Kryptering er videnskaben bag sikker kommunikation, altså kunsten at sende hemmelige beskeder. En sikkerhedsprocedure, der bruges i mange IT-systemer, er den såkaldte *RSA-procedure*. RSA er en forkortelse for Rivest, Shamir og Adleman, opfinderne af proceduren [5]. Proceduren beror på, at det er meget svært, at primtalsfaktorisere store heltal. Indtil videre kender man ingen effektiv algoritme til at gøre det. En modtager finder to meget store primtal p_1, p_2 og ganger dem sammen. Hvis en person skal afkode en besked, kræver det, at vedkommende finder primtalsfaktoriseringen af $p_1 \cdot p_2$. Som et eksempel (ja, det er cirka denne størrelsesorden i et rigtigt sikkerhedssystem) kunne vi vælge primtallene

$$\begin{aligned} p_1 =& 20747222467734852078216952221076085874809964747211172927529925899121966847 \\ & 505496583100844167325500077 \\ p_2 =& 72126101472954749095445237850434924099693821481867654600825000853935195565 \\ & 2592145558870542302075142 1 \end{aligned}$$

At gange disse tal sammen gøres hurtigt (omend lommeregneren på min (Rasmus) computer nægtede!):

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 =& 1496416272989810578868456942183575478148160392377896104167832218 \\ & 0333144368227098607515132513189612225229073721923916059172829814 \\ & 4292465045647829035182956223609793921876215420154449162261241620 \\ & 51409417 \end{aligned}$$

Men at faktorisere dette tal ville tage årtusinder for en almindelig computer. Produktet ovenover har 199 cifre. Det er en evig konkurrence blandt matematikere i kryptografi at faktorisere så store tal som muligt. Rekorden i skrivende stund er for et tal på 250 cifre [6] med en generel algoritme. Primtallene ovenover er fundet på [7].

Opgaver til Primtal

• **Opgave 1.3.1:**
Find alle primtal mindre end eller lig 100. Kryds de tal af i nedenstående skema, som ikke er primtal. [Vink: se bemærkning 1.3.13.]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

•• **Opgave 1.3.2:**
Vis, at følgende tal er primtal:

1) 101

2) 127

3) 233

• **Opgave 1.3.3:**
Afgør, om 3 deler følgende heltal:

1) 123

2) 1477

3) 10000000001

4) 718494

• **Opgave 1.3.4:**
Afgør, om 5 deler følgende heltal:

1) 184760

2) 54190672665

3) 193915818

4) 681985

• **Opgave 1.3.5:**
Afgør, om 11 deler følgende heltal:

1) 121

2) 211

3) 833074924

4) 55821

•• **Opgave 1.3.6:**
Find primtalsfaktoriseringen af følgende heltal:

1) 110

2) 79

3) 1728

●● **Opgave 1.3.7:**
Find primtalsfaktoriseringen af følgende heltal:

1) 100

2) 1000

3) 10000

4) Hvad er generelt primtalsfaktoriseringen af 10^n hvor n er et positivt heltal?

●● **Opgave 1.3.8: Primorialer**
Primtalsfaktorisér følgende tal:

1) 2

2) 6

3) 30

4) 210

Hvad er mon det næste tal i følgen? Denne følge kaldes primorialerne.

● **Opgave 1.3.9:** 🖩
Primtalsfaktorisér følgende tal:

1) 1176

2) 72500

3) 2873

●● **Opgave 1.3.10:**
Lad a, b, d være heltal, og antag $d \mid a$ og $d \mid b$. Bevis, at d deler $a + b$ og $a - b$.

●● **Opgave 1.3.11:**
Lad a og b være heltal. Antag, at a deler b og b deler a. Bevis, at a er lig b eller $-b$. [Vink: Hvis det for heltal c og d gælder, at $c \cdot d = 1$, så må $c = d = \pm 1$]

●● **Opgave 1.3.12:**
Antag, at et heltal a deler b, og at b deler et andet heltal c. Bevis, at a deler c. Denne egenskab kaldes for *transitivitet*.

●● **Opgave 1.3.13:**
Betragt et kvadrattal $a = n^2$. Hvad gælder om potenserne af primfaktorerne i a?

●● **Opgave 1.3.14: Sophie Germain-primtal**
Find de første fem Sophie Germain-primtal. [Vink: se eksempel 1.3.8 og opgave 1.3.1.]

●● **Opgave 1.3.15: Mersenne-primtal**
Find de første tre Mersenne-primtal. [Vink: se eksempel 1.3.7 og opgave 1.3.1.]

●● **Opgave 1.3.16: Perfekte tal**
Et *perfekt tal* (også kaldet fuldkomment tal) er et heltal, hvor summen af tallets positive divisorer (med undtagelse af tallet selv) er lig tallet selv.

1) Find de første to perfekte tal.

2) Lad p være et primtal. Hvis $2^p - 1$ er et primtal, så er $2^{p-1}(2^p - 1)$ et perfekt tal. Vis, at de to perfekte tal du lige har fundet opfylder denne betingelse. [Vink: Husk, at $2^p - 1$ er et Mersenne primtal og brug resultatet fra opgave 1.3.15.]

Historisk note: Selvom perfekte tal har en tæt relation til Mersenne primtal, så blev de faktisk opdaget den græske matematiker *Euklid fra Alexandria* allerede omkring år 300 f.v.t. Han beviste, at tal på formen $2^{p-1}(2^p - 1)$ er perfekte tal. Dette bevis indgik som en del af Euklids store værk *Elementerne* (proposition IX-36), som faktisk var den anvendte lærebog i geometri helt frem til omkring år 1900. Euklids Elementerne er faktisk den bog i verdenshistorien, som er udkommet i næstflest udgaver - kun overgået af Biblen. Altså kan dette værk betragtes som den mest indflydelsesrige lærebog, der nogensinde er skrevet. Vi skal se nærmere på et andet resultat fra Euklid i det næste emne.

Det var dog først i 1700-tallet, at den schweiziske matematiker Leonhard Euler beviste, at alle perfekte tal kan skrives på denne form. Derfor kaldes denne relation mellem perfekte tal og primtal for Euklid-Euler sætningen.

●● **Opgave 1.3.17: Fermat-primtal**

Hvis et primtal p er på formen $p = 2^{2^k} + 1$ for et positivt heltal k kaldes p et *Fermat-primtal*. Vis, at $2^{2^k} + 1$ er et primtal for $k = 0, 1, 2, 3$.

Historisk note: $2^{2^4} + 1 = 65537$ er også et primtal. For hvilke k er $2^{2^k} + 1$ et primtal? Det gælder i hvert fald for $k = 0, 1, 2, 3, 4$, hvilket ledte Pierre de Fermat (som tallene er opkaldt efter) til at formode, at alle heltal på denne form faktisk er primtal. I 1732 viste Leonhard Euler [8], at dette er forkert, idet $2^{2^5} + 1 = 641 \cdot 6700417$. I 1844 lavede matematikeren Gotthold Eisenstein formodningen, at der eksisterer uendeligt mange Fermat-primtal. Ikke desto mindre kender vi stadig ikke til nogle andre Fermat-primtal end præcist de fem ovenstående, og det er et ubesvaret spørgsmål, om der overhovedet findes andre Fermat-primtal [9].

●● **Opgave 1.3.18: Goldbachs formodning**

Følgende små opgaver fører os til ideen bag Goldbachs formodning.

1) Vis, at alle positive lige tal (bortset fra 2) mindre end 30 kan skrives som en sum af to positive primtal.

2) Det oplyses, at 34 kan skrives som en sum af to positive primtal på præcis fire forskellige måder. Find disse fire måder.

Goldbachs formodning siger, at alle lige tal større end 2 kan skrives som en sum af to primtal. Man har ved brug af en computer vist, at formodningen er sand for alle tal mindre end $4 \cdot 10^{18}$ (et 4-tal med 18 nuller efter), men det er endnu et ubesvaret spørgsmål, om formodningen er sand [10].

1.4 Euklids algoritme og største fælles divisorer

Største fælles divisorer

I dette afsnit skal vi se nærmere på såkaldte største fælles divisorer af to heltal. Som navnet antyder, er den største fælles divisor af a og b det største heltal d, som deler både a og b. Den formelle definition lyder:

Definition 1.4.1. Lad a og b være heltal. Den *største fælles divisor* af a og b er et positivt heltal d, så $d \mid a$, $d \mid b$ og hvis et andet heltal k opfylder $k \mid a$ og $k \mid b$, da vil $k \mid d$. Vi betegner den største fælles divisor med $\gcd(a, b)$ (gcd er en forkortelse for "greatest common divisor", største fælles divisor på engelsk).

Lad os starte med et eksempel:

Eksempel 1.4.2. Vi ønsker at finde $\gcd(10, 25)$. Divisorerne for 10 er $\pm1, \pm2, \pm5$ og ±10. Divisorerne for 25 er $\pm1, \pm5$ og ±25. Man kan f.eks. se dette ved at primtalsfaktorisere 10 og 25. Vi ser, at den største fælles divisor er 5. ◦

Bemærkning 1.4.3. Vi bemærker en ting ved definitionen. Der står *den* største fælles divisor, hvilket antyder, at den er unik. Dette er tilfældet, se opgave 1.4.16.

Følgende lemma viser faktisk, at vi helt kan se bort fra fortegn, når vi skal udregne den største fælles divisor af to heltal:

Lemma 1.4.4. *For to heltal a og b gælder:*

$$\gcd(a, b) = \gcd(-a, b) = \gcd(a, -b) = \gcd(-a, -b)$$

Bevis. Vi nøjes med at bevise $\gcd(a, b) = \gcd(-a, b)$. De andre ligheder vises på samme måde. Lad $d_1 = \gcd(a, b)$ og $d_2 = \gcd(-a, b)$. d_1 deler både $-a$ og b, så $d_1 \mid d_2$, da d_2 er største fælles divisor for $-a$ og b. d_2 deler dog også både a og b, så $d_2 \mid d_1$. Da både d_1 og d_2 er positive, må $d_1 = d_2$ som ønsket (se opgave 1.3.11). ■

Bemærkning 1.4.5. Bemærk, at alle heltal a deler 0 (hvorfor?). Derfor er $\gcd(a, 0) = \gcd(0, a) = a$ for alle heltal $a \neq 0$. Vi definerer $\gcd(0, 0) = 0$.

Eksempel 1.4.6. Vi vil udregne $\gcd(-23, 344)$. Fra lemmaet ovenover ved vi, at dette er det samme som $\gcd(23, 344)$. 23 er et primtal, så de eneste divisorer er ±1 og ±23. Idet 23 ikke deler 344 (tjek dette!), må den største fælles divisor af de to tal være 1. ◦

Tilfældet i ovenstående eksempel, hvor største fælles divisor er 1, har sit eget navn:

Definition 1.4.7. To heltal a og b kaldes *indbyrdes primiske*, hvis deres største fælles divisor er 1, altså hvis $\gcd(a, b) = 1$.

Det er ikke svært at se, at vores metode med at finde samtlige divisorer i to tal og derefter udvælge den største, er ret upraktisk for store tal. Vi skal nu udvikle smarte metoder til at udregne den største fælles divisorer.

Euklidisk division

Fra matematikundervisningen er I vant til at dividere to tal med hinanden. F.eks. er $7/2$ lig 3,5. Men 2 deler jo ikke 7 som et heltal. Generelt deler to heltal ikke hinanden, men man kan indføre en anden form for division, hvor de altid "deler" hinanden. Denne form for division er division med rest, også kaldet *euklidisk division*. Vi har først brug for at kende til den absolutte værdi af tal:

Definition 1.4.8. For et vilkårligt tal a defineres $|a|$ til at være a hvis $a \geq 0$ og $-a$ hvis $a < 0$. $|a|$ kaldes den *numeriske værdi* eller den *absolutte værdi* af a.

Den absolutte værdi fungerer ved blot at fjerne fortegnet ved et tal. F.eks. er $|-3| = 3$, $|3,14| = 3,14$ og $|-914/231| = 914/231$. Vi kan nu lave division med rest. Først har vi en vigtig sætning [11, s. 271]:

Sætning 1.4.9 (Euklidisk division). *Lad a og $b \neq 0$ være heltal. Da eksisterer der unikke heltal q og r, der opfylder $a = qb + r$ og $0 \leq r < |b|$.*

Bevis. Vi starter med at vise, at der findes heltallene q og r med $a = qb + r$. Vi har to tilfælde, nemlig $b > 0$ og $b < 0$. Lad os først antage $b > 0$. Vi kan opdele tallinjen i stykker af halvåbne intervaller $[nb, (n + 1)b)$, hvor n løber over alle heltallene:

$$... < -2b < -b < 0 < b < 2b < ... \tag{1.2}$$

a må ligge i netop én af disse intervaller. Lad dette interval være $[qb, (q + 1)b)$. Lad $r = a - qb$, da må vi have $0 \leq r < b = |b|$ og $a = qb + r$ som ønsket. Dette viser eksistensdelen for $b > 0$. Hvis $b < 0$, er $-b > 0$. Det, vi lige har vist, giver, at der findes heltal q og r, så $a = q(-b) + r$ med $0 \leq r < -b = |b|$. Ergo kan vi blot vælge $-q$ i stedet for q, og eksistensdelen er færdig. Unikhedsdelen af beviset overlades som opgave 1.4.17. ■

Definition 1.4.10. Opskrivningen $a = qb + r$ for to givne heltal a og $b \neq 0$ kaldes for *euklidisk division* eller *division med rest* på a og b. r kaldes for *resten* og q for *kvotienten*.

Eksempel 1.4.11. Lad os lave division med rest på 145 med 84. Vi ser, at 84 deler 145 én gang, så resten udregnes til at være $145 - 1 \cdot 84 = 61$. Ergo er $145 = 84 \cdot 1 + 61$. Prøver vi med tallene 132 og 12 ser vi, at 12 faktisk deler 132, og euklidisk division giver da, at $132 = 12 \cdot 11 + 0$. ○

For små tal er det ofte overskueligt at lave euklidisk division, men for store tal kan det være smart at have nogle teknikker. Lad os tage et eksempel, hvor vi gennemgår sådan en:

Eksempel 1.4.12. Vi vil lave division med rest på 3732 med 22. Her kan det være smart at benytte såkaldt ”lang division”. Lang division forstås nemmest ved, at man blot gennemgår teknikken. Ellers kan det være fordelagtigt at se videoer om emnet, f.eks. [12]. Vi gennemgår et eksempel med tallene 3732 og 22:

$$\begin{array}{r|l} 22 & \overline{3732} \\ & 22 \end{array}$$

Vi ser, at 22 deler 37 én gang, så vi noterer 1 øverst og trækker $1 \cdot 22 = 22$ fra 37 og hiver det næste ciffer (her 3) ned:

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 1 \\ 22 & \overline{3732} \\ & \underline{22} \\ & 153 \end{array}$$

Nu gentager vi bare. 22 deler 153 6 gange, så vi noterer 6 øverst, trækker $6 \cdot 22 = 132$ fra 153 og hiver næste ciffer (her 2) ned:

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 16 \\ 22 & \overline{3732} \\ & \underline{22} \\ & 153 \\ & \underline{132} \\ & \ \ 212 \end{array}$$

22 deler 212 9 gange. Vi trækker $9 \cdot 22 = 198$ fra 212 (her har vi ikke flere cifre at hive ned) og får:

$$
\begin{array}{r|r}
 & 169 \\ \hline
22 & 3732 \\
 & \underline{22} \\
 & 153 \\
 & \underline{132} \\
 & 212 \\
 & \underline{198} \\
 & 14
\end{array}
$$

14 er mindre end 22, så det er vores rest. Kvotienten aflæses til at være 169. Altså har vi udregnet $3732 = 22 \cdot 169 + 14$. Denne teknik er hurtig, når man har udført den nogle gange. $\circ$

Euklids algoritme

Nu kan vi endelig gennemgå *Euklids algoritme*. Målet er at finde den største fælles divisor af a og b. Euklids algoritme er overraskende simpel, når man har styr på euklidisk division. Hele algoritmen bygger på den centrale betragtning, at hvis vi skriver $a = bq+r$, da vil $\gcd(a,b) = \gcd(b,r)$. Lad os vise dette:

Lemma 1.4.13. *For heltal a og b gælder, at hvis $a = qb + r$ for heltal q og r, da vil $\gcd(a,b) = \gcd(b,r)$.*

Bevis. Lad $d_1 = \gcd(a,b)$ og $d_2 = \gcd(b,r)$. Det er nok at vise, at $d_1 \mid d_2$ og $d_2 \mid d_1$, idet begge tal er positive. d_1 deler både a og b, så d_1 deler også r, da $r = a - qb$. Dermed deler d_1 både b og r. Da d_2 er den største fælles divisor for b og r, vil $d_1 \mid d_2$. Da d_2 deler r og b, vil d_2 også dele $a = qb + r$. Men da har vi også $d_2 \mid d_1$, hvilket fuldfører beviset. ■

Euklids algoritme

Lad heltallene a og b være givet. Per lemma 1.4.4 kan vi antage, at hverken a eller b er negative. Af hensyn til notation omdøber vi $a = r_0$ og $b = r_1$. Skriv $r_0 = q_1 r_1 + r_2$ med $0 \leq r_2 < r_1$. Gentag på følgende måde:

$$
\begin{aligned}
r_0 &= q_1 r_1 + r_2 \quad \text{hvor } 0 \leq r_2 < r_1 \\
r_1 &= q_2 r_2 + r_3 \quad \text{hvor } 0 \leq r_3 < r_2 \\
&\dots \\
r_{n-1} &= q_n r_n
\end{aligned}
$$

indtil resten bliver 0. Den sidste ikke-nul rest r_n er lig $\gcd(r_0, r_1) = \gcd(a,b)$.

Vi skal naturligvis bevise, at denne fremgangsmåde er korrekt. Først er det dog på sin plads med et eksempel.

Eksempel 1.4.14. Vi ønsker at finde $\gcd(1957, 446)$. Vi følger proceduren ovenover:

$$\begin{aligned}
1957 &= 4 \cdot 446 + 173 \\
446 &= 2 \cdot 173 + 100 \\
173 &= 1 \cdot 100 + 73 \\
100 &= 1 \cdot 73 + 27 \\
73 &= 2 \cdot 27 + 19 \\
27 &= 1 \cdot 19 + 8 \\
19 &= 2 \cdot 8 + 3 \\
8 &= 2 \cdot 3 + 2 \\
3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\
2 &= 2 \cdot 1 + 0
\end{aligned}$$

Det ses, at den sidste rest forskellig fra 0 er 1. Ergo er $\gcd(1957, 446) = 1$. ○

Lad os give et bevis for, at Euklids algoritme fungerer.

Sætning 1.4.15 (Korrekthed af Euklids algoritme). *Euklids algoritme anvendt på to ikke-negative heltal a og b giver den største fælles divisor* $\gcd(a, b)$.

Bevis. Lad os først vise, at algoritmen faktisk terminerer (slutter). Når vi laver den beskrevne procedure, får vi en række rester $r_0, r_1, r_2, ...$ Disse rester er alle større end eller lig 0, og vi har $r_0 > r_1 > r_2 > ....$ En vilkårlig rest bliver altså skarpt mindre end den forrige rest i hvert trin. Da de alle er ikke-negative, må proceduren stoppe på et tidspunkt, nemlig når resten bliver 0.

Algoritmen returnerer altså altid et output, nemlig r_n. Vi skal blot vise, at $r_n = \gcd(a, b)$. Dette følger ved blot at benytte lemma 1.4.13 på hver opskrivning i algoritmen. Vi har nemlig

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, r_2) = \gcd(r_2, r_3) = ... = \gcd(r_n, r_{n+1}) = \gcd(r_n, 0) = r_n$$

som ønsket. ∎

Bemærkning 1.4.16. At bevise korrekthed af en algoritme i datalogi eller matematik involverer altid at vise, at algoritmen slutter, og at algoritmen altid returnerer det korrekte output.

Euklids algoritme er ekstrem effektiv i praksis. I nogle af øvelserne kan I undersøge, hvornår Euklids algoritme indeholder flest trin, altså hvornår den er mindst effektiv. Man kan faktisk vise, at antallet af trin aldrig er mere end 5 gange antallet af cifre i det mindste af de to tal a og b [11]. Hvis f.eks. a eller b har 100 cifre, da kræver algoritmen ikke mere end 500 trin uanset størrelsen af det andet tal. Til sammenligning kan selv en billig mobiltelefon foretage milliarder af beregninger på et sekund.

Den udvidede Euklids algoritme

På nuværende tidspunkt er det i orden at spørge, hvorfor det er interessant at løse problemet med at finde største fælles divisorer. Hvorfor er Euklids algoritme nødvendig at kende? Det viser sig, at den kan bruges til langt mere end blot at udregne største fælles divisorer effektivt (hvilket f.eks. er centralt i kryptering). Den har også interessante teoretiske konsekvenser. Vi starter med et meget vigtigt resultat kaldet **Bézouts lemma** [13, s. 43]. Det er ikke vigtigt, at I kan beviset, blot hvad sætningen siger.

Sætning 1.4.17 (Bézouts lemma). *Lad $d = \gcd(a, b)$ for to heltal a og b ikke begge lig 0. Da eksisterer der hele tal x og y, så*

$$d = ax + by$$

Bevis. Vi starter med at bemærke, at sætningen oplagt gælder, hvis $a = 0$ eller $b = 0$. Lad os opskrive trinene i Euklids algoritme på $a = r_0$ og $b = r_1$:

$$\begin{aligned} r_0 &= q_1 r_1 + r_2 \\ r_1 &= q_2 r_2 + r_3 \\ &\ldots \\ r_i &= q_{i+1} r_{i+1} + r_{i+2} \\ &\ldots \\ r_{n-2} &= q_{n-1} r_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} &= q_n r_n \end{aligned}$$

Beviset fungerer ved at trævle algoritmen op bagfra. Vi viser mere generelt, at hvis man har to rester r_{i-1} og r_i lige efter hinanden, da findes hele tal x_{i-1} og y_i, så $d = r_{i-1}x_{i-1} + r_i y_i$. Dette vil bevise det ønskede, da tilfældet $i = 1$ svarer til $d = ax + by$ hvor $x = x_0$ og $y = y_1$. Vi ved, at $d = r_n$, så fra det næstsidste trin i algoritmen fås $d = r_{n-2} + (-q_{n-1})r_{n-1}$. Altså er påstanden vist for det næstsidste trin. For det tredjesidste trin har vi:

$$r_{n-3} = q_{n-2} r_{n-2} + r_{n-1}$$

Ved omrokering fås altså:

$$r_{n-1} = r_{n-3} - q_{n-2} r_{n-2}$$

Indsættes dette i vores udtryk for d fra før fås:

$$\begin{aligned} d &= r_{n-2} + (-q_{n-1})(r_{n-3} - q_{n-2} r_{n-2}) \\ &= (-q_{n-1}) r_{n-3} + r_{n-2} + q_{n-1} q_{n-2} r_{n-2} \\ &= (-q_{n-1}) r_{n-3} + (1 + q_{n-1} q_{n-2}) r_{n-2} \end{aligned}$$

Igen er d opskrevet på den ønskede form, men nu indgår der rester fra ét trin længere tilbage. Mere præcist ses det, at hvis $d = r_{i-1}x_{i-1} + r_i y_i$, hvor x_{i-1} og y_i allerede er kendt, da kan man udtrykke d ud fra de foregående rester som

$$\begin{aligned} d &= r_{i-1} x_{i-1} + (r_{i-2} - q_{i-1} r_{i-1}) y_i \\ &= r_{i-1} x_{i-1} + r_{i-2} y_i - q_{i-1} r_{i-1} y_i \\ &= y_i r_{i-2} + (x_{i-1} - y_i q_{i-1}) r_{i-1} \end{aligned}$$

Vi ved, at d kan opskrives ud fra tidligere rester i næstsidste og tredjesidste trin. Ligningerne ovenover giver en (endelig) procedure, vi kan følge for at komme tilbage til at opskrive d ud fra $r_0 = a$ og $r_1 = b$. Dette beviser sætningen. ■

Eksempel 1.4.18. Lad os finde en heltalsløsning (x, y) til ligningen $885x + 360y = \gcd(885, 360)$. Først bruger vi Euklids algoritme til at udregne $\gcd(885, 360)$:

$$\begin{aligned} 885 &= 2 \cdot 360 + 165 \\ 360 &= 2 \cdot 165 + 30 \\ 165 &= 5 \cdot 30 + 15 \\ 30 &= 2 \cdot 15 \end{aligned}$$

Så $\gcd(885, 360) = 15$. Vi trævler algoritmen op baglæns, indtil vi finder heltallene x og y:

$$\begin{aligned} 15 &= 165 - 5 \cdot 30 = 165 - 5 \cdot (360 - 2 \cdot 165) = 165 - 5 \cdot 360 + 10 \cdot 165 \\ &= -5 \cdot 360 + 11 \cdot 165 = -5 \cdot 360 + 11 \cdot (885 - 2 \cdot 360) \\ &= -5 \cdot 360 + 11 \cdot 885 - 22 \cdot 360 = -27 \cdot 360 + 11 \cdot 885 \end{aligned}$$

Vi aflæser, at en løsning er $(x, y) = (11, -27)$. At lave baglæns substitution kan være svært i starten, men tricket er at genkende resten i ligningerne og isolere den som udtryk af de to større rester, indtil man når til de to oprindelige tal (her var de 885 og 360). ∘

Lad os opsummere fremgangsmåden ovenover, da den er vigtig i mange sammenhænge (f.eks. opgaverne!):

Baglæns euklidisk algoritme

Vi ønsker at finde en heltalsløsning (x, y) til ligningen $\gcd(a, b) = ax+by$, hvor a og b er heltal ikke begge lig 0. Først anvendes Euklids algoritme som sædvanligt for at finde $\gcd(a, b)$:

$$r_0 = q_1 r_1 + r_2 \quad \text{hvor } 0 \le r_2 < r_1$$

$$r_1 = q_2 r_2 + r_3 \quad \text{hvor } 0 \le r_3 < r_2$$

$$\ldots$$

$$r_{n-2} = q_{n-1} r_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = q_n r_n$$

hvor vi har omdøbt $a = r_0$ og $b = r_1$. Vi ved, at $r_n = \gcd(a, b)$, og vi kan løse for $\gcd(a, b)$ i den næstsidste ligning og få:

$$\gcd(a, b) = r_{n-2} - q_{n-1} r_{n-1}$$

Ligeledes kan vi løse for r_{n-1} ved at se på ligningen før:

$$r_{n-1} = r_{n-3} - q_{n-2} r_{n-2}$$

Indsæt udtrykket for r_{n-1} i udtrykket for $\gcd(a, b)$ i ligningen ovenover. På den måde har vi udtrykt $\gcd(a, b)$ ud fra resterne r_{n-2} og r_{n-3}. Dette gentages, indtil man har udtrykt $\gcd(a, b)$ ud fra et tal gange a plus et tal ganget b. Tallet ganget på a er vores x, og tallet ganget på b er vores y, og løsningen er fundet.

Se på eksempel 1.4.18 igen. $\gcd(885, 360) = 15$, og den næstsidste ligning er $165 = 5 \cdot 30 + 15$. I første trin af sidste udregning isoleres 15, så $15 = 165 - 5 \cdot 30$. 30 indgår i den forrige ligning i første udregning, nemlig $360 = 2 \cdot 165 + 30$. Isolér 30 og få $30 = 360 - 2 \cdot 165$ og erstat 30 i ligningen $15 = 165 - 5 \cdot 30$ med $360 - 2 \cdot 165$. Som en god øvelse kan du følge resten af udregningen.

Opgaver

• **Opgave 1.4.1:**
Udregn:

1) $\gcd(11, 66)$

2) $\gcd(36, 124)$

3) $\gcd(2003, 10015)$ [Vink: 2003 er et primtal]
Overvej undervejs hvilke metoder, du har anvendt.

• **Opgave 1.4.2:**
Brug Euklids algoritme til at udregne:

1) $\gcd(245, 135)$

2) $\gcd(-714, -356)$

3) $\gcd(5139, -481)$

• **Opgave 1.4.3:**
Brug Euklids algoritme til at udregne:

1) $\gcd(4145, 965)$

2) $\gcd(1349, 223)$

3) $\gcd(11903, 1789)$

•• **Opgave 1.4.4:**
Lad p og q være forskellige primtal. Hvad er $\gcd(p, q)$?

•• **Opgave 1.4.5:**
Lad a og b være heltal.

1) Vis, at hvis a og b er indbyrdes primiske, så findes heltal x og y, så $1 = ax + by$.

2) Antag nu omvendt, at der findes heltal x og y, så $1 = ax + by$. Vis, at $\gcd(a, b) = 1$.
Vi har altså vist, a og b er indbyrdes primiske hvis og kun hvis der findes heltal x, y, så $1 = ax + by$.

• **Opgave 1.4.6:**
Find en heltalsløsning (x, y) til ligningen $245x + 135y = \gcd(245, 135)$ (du må gerne genbruge udregningerne fra opgave 1.4.2).

•• **Opgave 1.4.7:**
Antag, at der findes en heltalsløsning (x, y) til ligningen $ax + by = c$.

1) Vis, at $\gcd(a, b) \mid c$.

2) Findes der en heltalsløsning (x, y) til ligningen $125x + 340y = 1337$?

•• **Opgave 1.4.8:**
Afgør, om der findes en heltalsløsning (x, y) til ligningerne herunder. Hvis der findes en løsning, udregn den. Det kan være en ide at lave opgave 1.4.7 først (ellers benyt det, opgaven viser).

1) $13x + 55y = 1$

2) $169x + 130y = 26$

3) $35x = 1 + 179y$

4) $2048x + 198850y = 3567$

●●● **Opgave 1.4.9:**
Antag, at a og b er indbyrdes primiske heltal, der begge deler c. Vi vil vise, at $ab \mid c$.

1) Vis, at der findes heltal x og y, så $c = c(ax + by)$. [Vink: brug opgave 1.4.5]

2) Forklar, hvorfor der findes heltal d og e, så $c = ad$ og $c = be$.

3) Forklar, hvorfor $c = cax + cby = beax + adby = abex + abdy$

4) Brug forrige delopgave til at konkludere, at ab deler c.

●●● **Opgave 1.4.10: Bevis for Euklids lemma**
I denne øvelse vil vi bevise Euklids lemma, se lemma 1.4.10.

1) Hvis p deler a, er vi færdige, så antag, at p ikke deler a. Hvad er $\gcd(p, a)$?

2) Vis, at der findes heltal x, y, så $xp + ya = 1$

3) Vis, at p deler b, og konkludér, at sætningen er bevist.

●● **Opgave 1.4.11:**
Lad a og b være heltal og $c = \frac{a}{\gcd(a,b)}$ og $d = \frac{b}{\gcd(a,b)}$. Vis, at $\gcd(c, d) = 1$. [Vink: brug Bézouts lemma og opgave 1.4.5(1)].

●● **Opgave 1.4.12:**
En anvendelse af største fælles divisorer er i at forkorte brøker. En brøk a/b siges at være *uforkortelig* eller *reduceret*, hvis $\gcd(a, b) = 1$. F.eks. er $1/7$ uforkortelig, mens $10/70$ ikke er det.

1) Omskriv $185/490$ til en uforkortelig brøk.

2) Omskriv $1244/2588$ til en uforkortelig brøk.

3) Vis, at $661/789$ er en uforkortelig brøk.

[Vink: per opgave 1.4.11 skal vi blot dividere ud med den største fælles divisor i tæller og nævner]

●● **Opgave 1.4.13: Fibonacci-tal**
Definér $F_0 = 0, F_1 = 1$ og $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Sådan en definition kaldes *rekursiv*. Tallene F_n udgør en talfølge kaldet *Fibonacci-tallene*.

1) Overbevis dig selv om, at de første led i følgen er:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... \tag{1.3}$$

2) Udregn de næste fem led i Fibonacci-følgen (1.3), dvs. F_7, F_8, F_9, F_{10} og F_{11}.

3) Lav euklidisk division på F_{n+2} med F_{n+1} ($a = F_{n+2}$ og $b = F_{n+1}$ i definitionen). Hvad er resten?

●● **Opgave 1.4.14:**

1) Udregn $\gcd(3, 2)$, $\gcd(5, 3)$, $\gcd(8, 5)$, $\gcd(13, 8)$, $\gcd(21, 13)$ med Euklids algoritme (ja, det virker lidt unødvendigt, men der er en pointe!). Hvor mange trin bruger du i hvert tilfælde? [Vink: prøv at starte bagfra, altså udregn $\gcd(21, 13)$, derefter $\gcd(13, 8)$ osv. Kan du genbruge nogle udregninger?]

2) Bevis, at $\gcd(F_{n+2}, F_{n+1}) = 1$ for alle positive heltal n ved at benytte Euklids algoritme. Konkludér ud fra udregningen, at algoritmen bruger n trin på at udregne $\gcd(F_{n+2}, F_{n+1}) = 1$.

●● **Opgave 1.4.15:**
Antag, at vi vælger at droppe antagelsen om, at resten r fra euklidisk division skal være større end eller lig 0, men blot at $r < |b|$. Giv et eksempel, der viser, at division med rest ikke behøver at have unik rest og kvotient.

●● **Opgave 1.4.16:**
Bevis, at hvis d_1 og d_2 begge er største fælles divisorer for a og b, da vil $d_1 = d_2$. [Vink: lad dig inspirere af beviset for lemma 1.4.4]

●●●● **Opgave 1.4.17: Unikhed i sætning 1.4.9**
Lad a og $b \neq 0$ være heltal. I beviset for sætning 1.4.9 om euklidisk division har vi vist, at der findes heltal q, r, så $a = qb + r$ med $0 \leq r < |b|$. Vis, at q og r er unikke.
[Vink: Antag, at q', r' er en anden løsning. Vis, at der må gælde $b(q - q') = r' - r$. Idet $0 \leq r, r' < |b|$, må deres forskel $|r' - r|$ være mindre end $|b|$. Brug dette til at vise $|q - q'| < 1$ og konkludér, at $q = q'$ og $r = r'$, så opskrivningen $a = qb + r$ er unik.]

Hvor hurtig er Euklids algoritme? I tidligere opgaver har vi vist, at Fibonacci-tallene F_n giver en nedre grænse på, hvor hurtig algoritmen udregner $\gcd(F_{n+2}, F_{n+1})$. Dette kræver n trin. Er to på hinanden følgende Fibonacci-tal det "værste" input, man kan kan give algoritmen? Svaret viser sig at være ja:

Sætning 1.4.19 (Lamé's sætning). *Lad a og b være heltal med $a > b \geq 1$ og $b < F_{n+2}$. Udregningen af $\gcd(a, b)$ med Euklids algoritme indeholder færre end n trin.*

Vi refererer til [14, s. 935 - 936] for et bevis for denne sætning. Denne sætning kan man bruge til at give en konkret øvre grænse for Euklids algoritme for alle input a og b. Sætningen er desuden vigtig historisk set, da den anses for at være begyndelsen på den matematiske disciplin kaldet *kompleksitetsteori*, se [15]. Sætningen er navngivet til ære for dens opdager, den franske matematiker Gabriel Lamé, se evt. [16].

1.5 Modulær aritmetik

Vi har hidtil arbejdet med den standard aritmetik, I kender fra skolen, men ikke alt den aritmetik, I laver i hverdagen, er helt standard aritmetik. Tag følgende eksempel på et 12-timers ur: Hvis man går 2 timer frem i tiden fra klokken 11 om formiddagen, er klokken 1 om eftermiddagen. Det vil sige, at når vi regner med tid på et 12-timers ur, er det som om, at vi har

$$11 + 2 = 1.$$

Det er selvfølgelig lidt snyd, klokken 1 om eftermiddagen og om natten er slet ikke det samme. Ikke desto mindre vil vi i det her kapitel undersøge en måde at lægge tal sammen, hvor vi kan bestemme os for, at 3 eller 4 eller et hvilket som helst naturligt tal n er lig med 0.

Grundlæggende modulær aritmetik

Vi starter med en definition, som vil virke som nonsens, indtil man regner lidt med den:

Definition 1.5.1 (Kongruens)**.** Lad n være et naturligt tal og lad a, b være heltal. Vi siger at a er *kongurent* med b modulo n hvis

$$n \mid (a - b)$$

og vi skriver dette symbolsk som

$$a \equiv b \pmod{n}$$

Lad os tage nogle eksempler, før vi går videre:

Eksempel 1.5.2. Lad os se på en kongrunes modulo 3, det vil sige vi vælger $n = 3$. Lad os tage $a = 8$ og $b = 2$, vi kan da udregne at $a - b = 8 - 2 = 6$ og vi ved at $3 \mid 6$, så derfor har vi faktisk at

$$8 \equiv 2 \pmod{3}$$

○

Eksempel 1.5.3. Lad os se på en kongruens modulo 12, det vil sige vi vælger $n = 12$. Lad os tage $a = 13$ og $b = 1$, vi ser at $a - b = 13 - 1 = 12$ og selvfølgelig har vi $12 \mid 12$ så

$$13 \equiv 1 \pmod{12}$$

Ligesom med uret! ○

Følgende sætning giver alternative definitioner af kongruens:

Sætning 1.5.4. *Følgende udsagn er ækvivalente*

1. $a \equiv b \pmod{n}$.
2. *Der findes et heltal k så $a = b + kn$.*
3. *a og b har samme rest ved division med n.*

Bevis. Vi beviser sætningen ved at vise, at 1. medfører 2., at 2. medfører 3., og at 3. medfører 1. Vi viser først at 1. medføre 2: Antag derfor først, at $a \equiv b \pmod{n}$. Det betyder netop, at $n \mid (a - b)$. Men så ved vi, at der findes et heltal k så

$$a - b = kn, \text{ dvs.}$$
$$a = b + kn.$$

Altså medfører 1., at 2. gælder. Dernæst viser vi 2. medføre 3: Lad os sige, at vi ved, at $a = b + kn$. Lad r_1 og r_2 være henholdsvis resterne ved division af a og b med n, da kan vi skrive $a = k_1 n + r_2$ og $b = k_2 n + r_2$. Vi kan se at

$$\begin{aligned} k_1 n + r_1 &= (k_2 n + r_2) + kn \\ r_1 - r_2 &= k_2 n + kn - k_1 n \\ r_1 - r_2 &= n(k_2 + k - k_1) \end{aligned}$$

Så $n \mid (r_1 - r_2)$ og vi ved at $r_1 - r_2$ ligger et sted mellem $-(n-1)$ og $n-1$, da de er rester ved division med n. Det eneste tal af den type, som n deler, er 0 og derfor er $r_1 - r_2 = 0$, hvilket er det samme som $r_1 = r_2$. Dermed er resterne ens som ønsket, og 2 medføre 3.

Tilsidst viser vi at 3. medføre 1: Antag nu, at a og b har samme rest ved division med n, lad os sige r, da kan vi finde heltal k_1 og k_2 så $a = k_1 n + r$ og $b = k_2 n + r$. Vi kan da beregne

$$a - b = (k_1 n + r) - (k_2 n + r) = n(k_1 - k_2)$$

Så da $k_1 - k_2$ er et heltal kan vi se at $n \mid (a - b)$. Så vi ser nu at $a \equiv b \pmod{n}$. Vi har nu vist at de er ækvivalente. ∎

Korollar 1.5.5. *Lad a være et heltal og $0 \leq r < n$ dets rest ved division med n, dvs. $a = nk + r$. Da har vi at*

$$a \equiv r \pmod{n}$$

Dette korollar giver en vigtig intuition for modulær aritmetik. Siden et tal er kongurent med sin rest modulo n, er det som om vi sortere alle tal efter deres rest modulo n. Så vi tager mere eller mindre alle tal og sortere dem i n spande. Vi vil derfor nu vise at kongruens opfører sig præcis ligesom $=$, hvilket viser at vi faktisk har sorteret dem i hvad man kalder restklasser modulo n.

Sætning 1.5.6. *Lad n være et positivt heltal. Da har vi for heltal a, b, c at*

1. $a \equiv a \pmod{n}$.
2. *Hvis* $a \equiv b \pmod{n}$ *så har vi også* $b \equiv a \pmod{n}$.
3. *Hvis* $a \equiv b \pmod{n}$ *og* $b \equiv c \pmod{n}$ *så har vi* $a \equiv c \pmod{n}$

Bevis. De første to punkter overlades til øvelserne.

Lad os sige at $a \equiv b \pmod{n}$ og $b \equiv c \pmod{n}$. Det betyder at $n \mid (a - b)$ og $n \mid (b - c)$. Vi har at

$$a - c = a + (-b + b) - c = (a - b) + (b - c).$$

Men det vil sige at $n \mid (a - c)$ så $a \equiv c \pmod{n}$. ∎

Så alle tal ligger i den samme spand som sig selv, hvis a ligger i samme spand som b ligge b i samme spand som a og tilsidst hvis a ligger i samme spand som b som ligger i samme spand som c ligger de alle i samme spand.

Eksempel 1.5.7. Hvis man drejer 270° grader og derefter igen drejer 270° grader, svarer det blot til at dreje 180° grader. Det svarer til at

$$270 + 270 \equiv 540 \equiv 180 \pmod{360}$$

∘

Vi kan naturligvis lægge sammen og gange med tal modulo n. For eksempel har vi set at

$$11 + 2 \equiv 1 \pmod{12}$$

Vi skal dog være lidt forsigtige, for vi ved faktisk ikke om hvorvidt det, at $a \equiv b \pmod{n}$ er nok til at garantere at

$$a + c \equiv b + c \pmod{n}$$
$$ac \equiv bc \pmod{n}$$

Hvor c er et heltal. Det skal vi selvfølgelig bevise!

Sætning 1.5.8. *Lad n være et positivt heltal og a og b heltal. Antag, at $a \equiv b \pmod{n}$. Da har vi, at*

1. $a + c \equiv b + c \pmod{n}$ *for alle heltal c.*
2. $ac \equiv bc \pmod{n}$ *for alle heltal c.*

Bevis. Beviset for (1) følger, da

$$(a + c) - (b + c) = a - b,$$

og vi ved, at $n \mid (a - b)$, så derfor har vi også, at $n \mid (a + c) - (b + c)$.

Beviset for (2) følger, da vi ved, at

$$ac - bc = c(a - b)$$

og $n \mid (a - b)$, så derfor er $n \mid c(a - b)$. ■

Eksempel 1.5.9. Vi ved at

$$13 \equiv 1 \pmod{12}$$

Vi ser at

$$13 + 2 \equiv 15 \equiv 3 \equiv 1 + 2 \pmod{12}$$

og

$$13 \cdot 2 \equiv 26 \equiv 2 \equiv 1 \cdot 2 \pmod{12}$$

Ganske som vist. ∘

Ligninger modulo n

Når vi nu kan addere og gange modulo n, kunne man finde på at spørge sig selv, hvornår og hvordan man kan løse ligninger modulo n? Et eksempel på en ligning med heltal kunne være

$$ax = b$$

Hvor a og b er kendte heltal, mens x er et ukendt heltal. Vi ved, at vi kan finde x så ligningen går op når $a \mid b$, thi da har vi at $\frac{a}{b}$ er et heltal og da har vi

$$x = \frac{a}{b}$$

Bemærk det ikke altid er muligt, f.eks. hvis $a = 2$ og $b = 3$ er $\frac{a}{b}$ ikke et heltal.

Det viser sig der er et svar til dette spørgsmål modulo n.

Sætning 1.5.10. *Lad n være et naturligt tal og a, b heltal. Da kan vi finde et heltal x således at*

$$ax \equiv b \pmod{n}$$

hvis og kun hvis $\gcd(a, n) \mid b$.

Bevis. Lad os skrive $g = \gcd(a, n)$.

Hvis vi har en løsning x må det betyde at $n \mid (ax - b)$, hvilket betyder, at der findes et heltal k, så

$$\begin{aligned} ax - b &= kn \\ ax - kn &= b \end{aligned}$$

Vi ved, at $g \mid a$ og $g \mid n$, så derfor har vi, at $g \mid b$.

Antag nu, at $g \mid b$. Vi ved fra Bézouts lemma (sætning 1.4.17), at vi kan bestemme heltal y og z, således at $g = ay + nz$. Vi ved også, at vi kan skrive $b = gk$ for et eller andet heltal k, da $g \mid b$. Lad nu $x = yk$, da har vi via vores regneregler, at

$$\begin{aligned} ax &\equiv ayk \pmod{n} \\ &\equiv ayk + nzk \pmod{n} \\ &\equiv (ay + nz)k \pmod{n} \\ &\equiv gk \pmod{n} \\ &\equiv b \pmod{n} \end{aligned}$$

■

Løsning af ligninger modulo n

Beviset ovenfor giver os faktisk en opskrift til at løse ligninger modulo n. Den er som følger

1. Tag to heltal a og b.
2. Beregn $\gcd(a, n)$ vha. Euklids algoritme. Hvis dette tal ikke deler b, så findes der ingen løsning. Hvis det gør, forsæt.
3. Ved at trævle Euklids algoritme op bagfra, find da y og z, så $\gcd(a, n) = ay + nz$.
4. Bestem til sidst k, således at $b = gk$, da er svaret $x = yk$.

Eksempel 1.5.11. Findes en løsning x til ligningen $5x \equiv 7 \pmod{11}$? Vi udregner:

$$\begin{aligned} 11 &= 2 \cdot 5 + 1 \\ 5 &= 5 \cdot 1 \end{aligned}$$

Så $\gcd(5, 11) = 1$, og 1 deler jo alle heltal, så der findes en løsning, som vi nu finder. Fra udregningerne oven over ses, at $1 = 11 - 2 \cdot 5$, det vil sige, at $y = -2$ og $z = 1$ i fremgangsmåden beskrevet ovenover. Vi skal finde k, så $7 = 1 \cdot k$, og $k = 7$ virker oplagt. $x = -2 \cdot 7 = -14$ er da en løsning. Bemærk, at vi også kan vælge f.eks. $x = 8$, da $8 \equiv -14$ (mod) 11. ○

Eksempel 1.5.12. Findes en løsning x til ligningen $25x \equiv 214 \pmod{165}$? Den største fælles divisor for 25 og 165 er et ulige tal, og eftersom 214 er lige, kan $\gcd(25, 165)$ ikke dele 214. Altså findes ingen løsning. ○

Eksempel 1.5.13. En lampe blinker klokken 12 og forsætter med at blinke hver gang, der er gået 5 timer. Vil lampen nogensinde blinke, mens timeviseren står på 1?

Efter, at lampen har blinket x gange, er der gået $5x$ timer. Den store viser står på 1 på det tidspunkt, hvis

$$5x \equiv 1 \pmod{12}$$

Eftersom 5 er et primtal, der ikke deler 12, har vi, at $\gcd(5,12) = 1$. Vi har, at $1 \mid 1$, så lampen vil faktisk blinke, mens den store viser står på 1.

Vi snyder lidt og ser, at

$$5 \cdot 5 + 12 \cdot (-2) = 25 - 24 = 1$$

og derfor er en løsning $x = 5$. Man kan også tjekke og se at

$$5 \cdot 5 \equiv 1 \pmod{12}.$$

Bemærk dog at vi også har at

$$\begin{aligned} 5 \cdot 17 &\equiv 85 \pmod{12} \\ &\equiv 1 + 84 \pmod{12} \\ &\equiv 1 + 12 \cdot 7 \pmod{12} \\ &\equiv 1 \pmod{12} \end{aligned}$$

Så $x = 17$ er også et svar. Vi har dog

$$\begin{aligned} 17 &\equiv 5 + 12 \pmod{12} \\ &\equiv 5 \pmod{12} \end{aligned}$$

∘

Man kan faktisk også bruge modulo regning til at (ikke) løse ligninger med normale heltal. Betragt følgende eksempel:

Eksempel 1.5.14. Betragt ligningen $7 = x^2 + y^2$. Findes der heltal x og y, som løser denne ligning? Hvis der gjorde, kunne vi også finde en løsning modulo 4, og der har vi

$$x^2 + y^2 \equiv 3 \pmod{4}.$$

(Note: $7 \equiv 3 \pmod{4}$). Vi ved at modulo 4 vil x og y være kongruente med deres rest ved division med 4, det vil sige, vi har at

$$x \equiv 0, 1, 2 \text{ eller } 3 \pmod{4}$$

er de eneste muligheder. Vi kan da se at

$$x^2 \equiv 0, 1, 0 \text{ eller } 1 \pmod{4}$$

og ligeledes med y. Men uanset hvad, kan vi se, at vi aldrig har

$$x^2 + y^2 \equiv 3 \pmod{4}.$$

Så der kan faktisk slet ikke findes nogen heltal x, y så $7 = x^2 + y^2$, for det ville gives os en løsning ovenfor. Dette leder til følgende sætning. ∘

Sætning 1.5.15. *En heltalsligning, der ingen løsning har modulo et eller andet positivt heltal n, kan ingen heltalsløsning have.*

I praksis er der ingen generel metode til at finde et n, man kan bruge. Det handler om held, gæt og mavefornemmelse. Men hvis man kan finde et, kan man bruge sætningen til at sige, at en given ligning ikke har en heltalsløsning.

Lad os til sidst give resten af beviset for lemma 1.3.11:

Bevis (for lemma 1.3.11 (ii) og (iv)). Skriv heltallet a som $a = a_k a_{k-1} \ldots a_0$, hvor a_k, $a_{k-1}, \ldots a_0$ betegner cifrene fra venstre mod højre ligesom tidligere. Da har vi:

$$a = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_0 \cdot 10^0$$

Vi husker, at $3 \mid a$ hvis og kun hvis $a \equiv 0 \pmod 3$, og at $10 \equiv 1 \pmod 3$. Reducerer vi summen ovenover modulo 3 ovenover fås altså:

$$a \equiv a_k \cdot 1 + a_{k-1} \cdot 1 + ... + a_0 \cdot 1 \equiv a_k + a_{k-1} + ... + a_0 \pmod 3$$

Højresiden er netop tværsummen for a. Altså deler 3 a hvis og kun hvis 3 deler tværsummen. Strategien til at vise (iv) er identisk. Vi ser, at $10 \equiv -1 \pmod{11}$, så $10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}$ for alle positive heltal k. Reducerer vi summen modulo 11, fås:

$$a \equiv a_k \cdot (-1)^k + a_{k-1} \cdot (-1)^{k-1} + ... + a_0 \cdot 1 \pmod{11}$$

Dette er netop den alternerende tværsum, så 11 deler a hvis og kun hvis 11 deler den alternerende tværsum. ■

I opgaverne kan I se flere regneregler for, hvornår et heltal deler et andet.

Opgaver

• **Opgave 1.5.1:**
Med at reducere et heltal a modulo n forståes at finde det mindste positive heltal som a er kongruent med. Gør dette i følgende ved brug af korollar 1.5.5:

1) $1 \equiv ? \pmod 4$

2) $32 \equiv ? \pmod{24}$

3) $49 \equiv ? \pmod{32}$

4) $144 \equiv ? \pmod{23}$

5) $7 \cdot 4 \equiv ? \pmod 5$

6) $4 \cdot 5 \equiv ? \pmod 7$

• **Opgave 1.5.2:**
Vis, at følgende gælder:

1) $1 \equiv -1 \pmod 2$

2) $10234875 \equiv 0 \pmod{10234875}$

3) $7 \equiv 3 \pmod 4$

4) $17 \equiv 1 \pmod 4$

5) $22 \equiv 2 \pmod 5$

6) $11 \equiv 3 \pmod 4$

7) $11 + 3 \equiv 2 \pmod{12}$

•• **Opgave 1.5.3:**
Vi vil løse ligningen $22x \equiv 16(\text{mod } 12)$.

1) Udregn $\gcd(22, 12)$ med Euklids algoritme. Hvorfor ved vi allerede her, at der findes en løsning?

2) Find en løsning til ligningen.

•• **Opgave 1.5.4:**
Afgør om følgende ligninger har en løsning, hvis ja find en:

1) $5x \equiv 4 \pmod{10}$

2) $5x \equiv 3 \pmod{11}$

3) $7x \equiv 3 \pmod{11}$

4) $6x \equiv 5 \pmod{10}$

5) $6x \equiv 4 \pmod 8$

6) $8x \equiv 13 \pmod{17}$

•• **Opgave 1.5.5:**
Bevis punkt 1. og 2. i sætning 1.5.6.

••• **Opgave 1.5.6:**
Vi ser i denne opgave på potenser af et primtal modulo det samme primtal.

1) Udregn og reducer alle potenser af 3 modulo 3. [Vink: Du behøver kun at udregne og reducere 0^3, 1^3 og 2^3, overvej hvorfor det er tilfældet.]

2) Gentag med alle potenser af 4 modulo 4.
Ekstra: Forsæt og gør det med potenser af 5 modulo 5, og potenser af 6 modulo 6. Kan du se et mønster?

••• **Opgave 1.5.7:**
Lad a og b være heltal, vis at

1) $(a + b)^2 \equiv a^2 + b^2 \pmod 2$ [Vink: brug kvadratsætningerne, regneregel 1.2.5]

2) $(a+b)^3 \equiv a^3 + b^3 \pmod 3$ [Vink: brug evt. kubiksætningerne, se opgave 1.2.16]

3) $(a+b)^5 \equiv a^5 + b^5 \pmod 5$

Det gælder generelt for et primtal p, at

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$$

Denne regneregel kaldes "Freshman's dream".

●●●● **Opgave 1.5.8:**
Lad n være et positivt heltal. Reducer $(n-1)^2$ modulo n.

●●● **Opgave 1.5.9:**
Lad a, b, c være kendte heltal og n et naturligt tal. Lad x være et ukendt heltal. Betragt følgende ligning

$$ax + b \equiv c \pmod n$$

Find en betingelse for der findes x som opfylder denne ligning der ligner den i sætning 1.5.10.

●● **Opgave 1.5.10:**
Det vides, at enhver sand matematiker drikker en kop kaffe hver gang, der er gået 3 timer på slaget. En matematiker drikker en kop kaffe klokken 1. Vil hun nogensinde drikke en kop kaffe klokken 17:00? [Vink: Brug opgave 1.5.9]

●●● **Opgave 1.5.11:**
I den her opgave bruger vi modulær aritmetik til at se, om ligninger har heltalsløsninger. [Vink: se sætning 1.5.15.]

1) Vis, at ligningen $3x^2 + 4y^2 = 98$ ingen heltalsløsninger har.

2) Har ligningen $3x^2 + 4y^2 = 91$ en heltalsløsning?

●●● **Opgave 1.5.12:**
Vi ser på nogle flere ligninger, der involverer heltal. [Vink: se sætning 1.5.15.]

1) Vis, at ligningen $6x + 12y + 33z = 2021$ ikke har nogle heltalsløsninger for x, y og z.

2) Har ligningen $x^2 + y^2 = 13$ en heltalsløsning?

3) Har ligningen $x^2 + y^2 = 2003$ en heltalsløsning?

●● **Opgave 1.5.13: ISBN**
Et *ISBN* (International Standard Book Number) er en serie af tal, der står i (næsten) alle bøger, som identificerer netop den bog. Vi skal i denne opgave kigge på 13-ciffer-ISBN. Lad os se på et eksempel:

978-0-471-43334-7

978 er altid de første tre cifre. De andre cifre fortæller om udgiver, titel med mere. Det sidste ciffer er et såkaldt *tjek-ciffer*. Lad x_1, x_2, ..., x_{13} betegne de 13 cifre fra venstre mod højre. Tjek-cifferet er det ciffer x_{13} mellem 0 og 9, der opfylder:

$$(x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + 3x_6 + x_7 + 3x_8 + x_9 + 3x_{10} + x_{11} + 3x_{12} + x_{13}) \equiv 0 \pmod{10}$$

1) I eksemplet ovenfor er 7 tjek-cifferet. Vis, at dette er sandt.

2) Find tjek-cifferet for 978-0-387-24527-?.

3) Find tjek-cifferet for 978-82-15-02710-?.

Tjek-cifre tillader en hurtig metode til at tjekke gyldigheden af ISBN for bøger. Man kan f.eks. vise, at tjek-cifferet altid bliver ugyldigt, hvis blot ét ciffer i nummeret ændres.

Opgave 1.5.14:
Udregn følgende:

1) $3^{100} \equiv ? \pmod{10}$ [Vink: $9 \equiv -1 \pmod{10}$]

2) $5^{100} \equiv ? \pmod{8}$

3) $9^{100} \equiv ? \pmod{10}$

4) Overvej, hvorfor at reducere et heltal modulo 10 svarer til at finde det sidste ciffer i tallet. Regn eventuelt nogen eksempler.

Opgave 1.5.15:
Bevis, at 9 deler et heltal *hvis og kun hvis* 9 deler tværsummen af tallet. [Vink: følg strategien i beviset for lemma 1.3.11 (ii) i slutningen af kapitlet]

Opgave 1.5.16:
Hvis vi skriver a som:

$$a = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$$

så deler 7 a, hvis og kun hvis 7 deler

$$a_k \cdot 3^k + a_{k-1} \cdot 3^{k-1} + ... + a_1 \cdot 3 + a_0 \tag{1.4}$$

1.6 Supplerende

Her til slut har vi noget supplerende materiale i det tilfælde, at vi bliver hurtigt færdige. Er du nået hertil på egen hånd, kan du frit vælge, hvad du vil arbejde med. Vi starter med at gennemgå en ny udregningsmetode til at finde største fælles divisorer, nemlig ved primopløsning. Den anden del omhandler såkaldte *kvadratiske rester*. Opgaverne kommer efter hvert afsnit i stedet for til allersidst.

Største fælles divisorer ved primopløsning

Vi starter med en simpel definition.

Definition 1.6.1. For to tal a og b defineres $\min(a, b)$ til at være det mindste af a og b, mens $\max(a, b)$ defineres til at være det største af de to tal.

Vi kan nu lave et motiverende eksempel:

Eksempel 1.6.2. Vi ønsker at finde $\gcd(3960, 1056)$. En hurtig anvendelse af Euklids algoritme giver:

$$\begin{aligned} 3960 &= 3 \cdot 1056 + 792 \\ 1056 &= 1 \cdot 792 + 264 \\ 792 &= 3 \cdot 264 \end{aligned}$$

så $\gcd(3960, 1056) = 264$. Lad os primfaktorisere 3960, 1056 og 264. Vi ser f.eks. hurtigt, at både 2, 3 og 5 deler 3960, og med lidt udregning fås $3960 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. Tilsvarende ses, at $1056 = 2^5 \cdot 3 \cdot 11$ og $264 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$. Bemærk, at primtallene i opløsningen af den største fælles divisor 264 også indgår i 3960 og 1056, hvilket jo generelt gælder for divisorer i et heltal. Vi kan dog sige mere, hvis vi ser nærmere på potenserne af primtallene. I 264 har 2 potensen 3, hvilket er den mindste potens af 2, som indgår i tallene 3960 og 1056. Det samme mønster gentager sig for 3 og 11. Hvad med 5? Der sker faktisk det samme, idet vi husker, at $5^0 = 1$. Vi ser altså:

$$\gcd(3960, 1056) = 264 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 11^1 = 2^{\min(3,5)} \cdot 3^{\min(2,1)} \cdot 5^{\min(1,0)} \cdot 11^{\min(1,1)}$$

$\circ$

Mønsteret i eksemplet ovenover er ikke tilfældigt, hvilket nedenstående sætning [11] viser:

Sætning 1.6.3. *Lad a og b være heltal, og skriv deres faktoriseringer som $a = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}$ og $b = p_1^{f_1} \cdot p_2^{f_2} \cdots p_n^{f_n}$ for $e_i, f_i \geq 0$ for alle $i = 1, ..., n$, og hvor primtallene p_i er forskellige indbyrdes. Da er:*

$$\gcd(a, b) = p_1^{\min(e_1,f_1)} \cdot p_2^{\min(e_2,f_2)} \cdots p_n^{\min(e_n,f_n)}$$

Bevis. Lader vi $d = p_1^{\min(e_1,f_1)} \cdot p_2^{\min(e_2,f_2)} \cdots p_n^{\min(e_n,f_n)}$, er det klart, at d er en divisor i både a og b, da alle primtalspotenser i d's primfaktorisering deler a og b. Vi lader nu c være en anden divisor i a og b. Vi er færdige idet, vi viser, at $c \mid d$. Primfaktorisér c som $c = q_1^{g_1} \cdot q_2^{g_2} \cdots q_m^{g_m}$, hvor q_j'erne er forskellige primtal. Idet q_1 deler c, deler q_1 også a og b. Vi ved da, at q_1 deler én af p_i'erne (Euklids lemma), og potensen g_1 skal være mindre end potensen af p_i i både a og b. Gentager vi dette argument for alle primdivisorerne i c, må $c \mid d$ som ønsket. $\blacksquare$

Nedenstående korollar giver en forklaring på, hvorfor to heltal a og b med $\gcd(a, b) = 1$ kaldes indbyrdes primiske.

Korollar 1.6.4. *Heltallene a og b er indbyrdes primiske hvis og kun hvis, a og b ingen primtal har tilfælles i deres primfaktoriseringer.*

Bevis. Resultatet følger direkte af den foregående sætning. ■

Til slut skal det bemærkes, at ovenstående sætning er rigtig smart at bruge, hvis man allerede kender primfaktoriseringerne af a og b, at a og b er forholdsvis små, eller hvis a og b har en helt bestemt form (f.eks. hvis a er en potens af netop ét primtal). Generelt er det dog altid hurtigst at bruge Euklids algoritme til at udregne den største fælles divisor.

Opgaver

• **Opgave 1.6.1:**

Udregn følgende ved at benytte sætning 1.6.3 og korollar 1.6.4:

1) $\gcd(36, 125)$

2) $\gcd(32, 20)$

3) $\gcd(77, 44)$

•• **Opgave 1.6.2:**
Udregn $\gcd(1452, 1045)$ på to måder. Primopløs først begge tal og brug sætning 1.6.3. Brug dernæst Euklids algoritme. Hvad er hurtigst?

••• **Opgave 1.6.3: Mindste fælles multiplum**
I denne opgave indfører vi et nyt begreb, nemlig *mindste fælles multiplum*. Mindste fælles multiplum af heltallene a og b er lig det mindste heltal c, som både a og b er divisor i.

Definition 1.6.5. *Mindste fælles multiplum* af a og b er et heltal c, så $a \mid c$ og $b \mid c$, og hvis $a, b \mid c'$, da vil $c \mid c'$. Vi skriver $\operatorname{lcm}(a, b) = c$ (lcm = "least common multiple", engelsk for "mindste fælles multiplum").

1) Udregn $\operatorname{lcm}(3, 5)$, $\operatorname{lcm}(7, 21)$ og $\operatorname{lcm}(25, 185)$.

2) Hvis a og b er indbyrdes primiske heltal, hvad er så $\operatorname{lcm}(a, b)$? [Vink: brug opgave 1.4.9]

3) Lad a og b være heltal. Find et udtryk for $\operatorname{lcm}(a, b)$ ud fra a, b og $\gcd(a, b)$. Det kan være smart at finde på nogle eksempler og regne på disse. Du kan evt. vente med at bevise din formel til efter næste delopgave.

4) Lad a og b være heltal med primopløsninger $a = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ og $b = q_1^{f_1} \cdots q_m^{f_m}$. Find et udtryk for $\operatorname{lcm}(a, b)$ ud fra disse primopløsninger. [Vink: lad dig inspirere af udtrykket for $\gcd(a, b)$ i sætning 1.6.3 og regn på eksempler!]

Kvadratiske rester

I afsnittet om modulær aritmetik fandt vi en fuldstændig løsning til problemet: Hvornår findes en heltalsløsning x til en ligning på formen $ax \equiv b \pmod{n}$, hvor a, b og n er heltal. I dette afsnit springer vi fra lineære ligninger modulo n til kvadratiske ligninger. Vi skal se på et meget vigtigt specialtilfælde af kvadratiske modulære ligninger, nemlig ligninger på formen $x^2 \equiv a \pmod{p}$, hvor $p > 2$ er et primtal.

Definition 1.6.6. Et heltal $a \neq 0$ er *kvadratisk rest* modulo primtallet $p > 2$ hvis der eksisterer et heltal x, så $x^2 \equiv a \pmod{p}$. Ellers kaldes a en *kvadratisk ikke-rest.*

Vil man finde ud af, om et heltal a er en kvadratisk rest modulo p, skal man altså undersøge, om der findes et heltal x, så $x^2 \equiv a \pmod{p}$.

Bemærkning 1.6.7. 0 betegnes hverken som en kvadratisk rest eller ikke-rest modulo noget primtal. Der er flere grunde til dette, specielt når man vil arbejde mere algebraisk med teorien, se f.eks. [4, s. 33]. Der er en række tekniske grunde til at udelukke primtallet 2 fra definitionen. Dog er problemet med at finde løsninger til alle andengradsligninger modulo 2 ikke svært, se opgave 1.6.11.

Eksempel 1.6.8. Lad $p = 7$ og $a = 2$. Idet $3^2 \equiv 2 \pmod{7}$, er 2 en kvadratisk rest modulo 7. Dog er 5 en kvadratisk ikke-rest modulo 7. ◦

For små primtal p er det ikke svært at kortlægge, hvilke heltal, der er kvadratiske rester modulo p, som følgende lemma viser:

Lemma 1.6.9. *Lad $p > 2$ være et primtal. En kvadratisk rest modulo p er kongruent til netop én af tallene* $1 \pmod{p}, 2^2 \pmod{p}, 3^2 \pmod{p}, ..., (p-1)^2 \pmod{p}$.

Bevis. Antag, at a er en kvadratisk rest modulo p. Da findes et heltal x, så $x^2 \equiv a \pmod{p}$. Hvis $x < p$, er vi færdige. Ellers skriver vi $x = qp + r$, hvor $0 \leq r < p$. Da er $x \equiv r \pmod{p}$ og dermed $r^2 \equiv a \pmod{p}$. Dette beviser lemmaet. ■

Lad os se dette lemma i praksis.

Eksempel 1.6.10. Lad os finde samtlige kvadratiske rester modulo 7 ved at opstille følgende tabel:

a	1	2	3	4	5	6
a^2	1	4	9	16	25	36
$a^2 \pmod{7}$	1	4	2	2	4	1

Af den her tabel aflæser vi, sammen med lemma 1.6.9, at alle kvadratiske rester modulo 7 er kongruent med enten 1, 2 eller 4. Så f.eks. er 79 kvadratisk rest modulo 7, da $79 \equiv 2 \pmod{7}$, som du kan tjekke. På samme måde ser vi, at 26 er en kvadratisk ikke-rest modulo 7, idet $26 \equiv 5 \pmod{7}$, og 5 ikke er en af tallene på tredje række i tabellen ovenover. ◦

Vi kan benytte fremgangsmåden i eksemplet til at finde alle mulige rester for et kvadrattal ved division med et heltal n (der ikke nødvendigvis er et primtal). Her skal vi blot huske at inkludere 0.

Eksempel 1.6.11. Hvilke rester kan vi få, når vi deler et kvadrattal med 6? Lad os lave en tabel:

a	0	1	2	3	4	5
a^2	0	1	4	9	16	25
$a^2 \pmod{6}$	0	1	4	3	4	1

Vi ser, at det er muligt at få resterne $0, 1, 3$ og 4. Dog er det umuligt at dele et kvadrattal med 6 og få en rest på 2 eller 5. ◦

Lad os se på en simpel anvendelse af teorien, vi har arbejdet med indtil videre:

Eksempel 1.6.12. Se på talfølgen $75, 775, 7775, \ldots$. Vi hævder, at denne følge ikke indeholder nogle kvadrattal. Ved at lave en simpel omskrivning af følgen til $70+5, 770+5, 7770+5, \ldots$ ser vi, at alle led i følgen er kongruent til 5 modulo 7. Per eksempel 1.6.10 kan et kvadrattal ikke have rest 5 modulo 7, ergo kan ingen tal i følgen være kvadrattal. ◦

Lad os afslutte dette afsnit med et meget interessant faktum. Lad p og q være forskellige ulige primtal. Man kan spørge sig selv, om der er nogen som helst sammenhæng mellem ligningerne:

$$x^2 \equiv p \pmod{q} \quad \text{og} \quad x^2 \equiv q \pmod{p}$$

Svaret viser sig at være ja. Vi har resultatet:

Sætning 1.6.13 (Kvadratisk reciprocitet). *Lad $p, q > 2$ være forskellige primtal.*

1. *Hvis $p \equiv 1 \pmod{4}$ eller $q \equiv 1 \pmod{4}$, er p kvadratisk rest modulo q hvis og kun hvis q er kvadratisk rest modulo p. Hvis både $p \equiv 3 \pmod{4}$ og $q \equiv 3 \pmod{4}$, er p kvadratisk rest modulo q hvis og kun hvis q er en kvadratisk ikke-rest modulo p.*

2. *-1 er en kvadratisk rest modulo p hvis og kun hvis $p \equiv 1 \pmod{4}$.*

3. *2 er en kvadratisk rest modulo p hvis og kun hvis $p \equiv 1 \pmod{8}$ eller $p \equiv 7 \pmod{8}$.*

Historien bag denne sætning er lang og interessant. Leonhard Euler var den første til at beskrive et resultat som sætningen ovenover i 1744. Adrien-Marie Legendre var den første til at udgive sætningen i en moderne formulering i 1788 [17, s. 6] sammen med et ufuldstændigt bevis. Det første fulde bevis blev fundet af Carl Friedrich Gauss, som i 1818 havde udgivet ikke mindre end seks forskellige beviser, og yderligere to blev fundet i hans noter efter hans død [17, s. 9]. Gauss kaldte sætningen "aureum theorema", der betyder "den gyldne sætning" på latinsk. Sætningen og teknikkerne til at bevise den er senere blevet en hjørnesten i meget moderne matematik. Til slut skal nævnes, at der findes over 300 forskellige beviser for sætningen [4, s. 34]. For en ikke-komplet liste, se [18].

Opgaver

• **Opgave 1.6.4:**

Lad $p > 2$ være et primtal. Lad a være et kvadrattal. Vis, at a er en kvadratisk rest modulo p.

•• **Opgave 1.6.5:**

Brug lemma 1.6.9 til at finde alle kvadratiske rester modulo:

1) 3

2) 5

3) 11

•• **Opgave 1.6.6:**

Hvad er de mulige rester, hvis man dividerer et kvadrattal med:

1) 4

2) 8

3) 14

●● **Opgave 1.6.7:**

1) Betragt talfølgen $2, 22, 222, 2222, \ldots$. Bevis, at intet tal i denne følge er et kvadrattal.

2) Gentag for talfølgen $1, 11, 111, 1111, \ldots$.
[Vink: benyt evt. opgave 1.6.6]

●● **Opgave 1.6.8:**

Vi vil verificere den kvadratiske reciprocitetslov, sætning 1.6.13, for primtallene $p = 3$ og $q = 5$. Det er helt lovligt at bruge resultatet fra opgave 1.6.5.

1) Bemærk, at $5 \equiv 1 \pmod 4$. Vis, at 3 er kvadratisk rest modulo 5 og, at 5 er kvadratisk rest modulo 3.

2) Vis, at -1 er en kvadratisk rest modulo 5, men en kvadratisk ikke-rest modulo 3.

3) Vis, at 2 er en kvadratisk ikke-rest modulo 3 og 5.

4) Stemmer alle delopgaverne overens med sætningen?

●● **Opgave 1.6.9:**

Vi verificerer igen den kvadratiske reciprocitetslov, denne gang for $p = 7$ og $q = 11$.

1) Vis, at 7 er en kvadratisk ikke-rest modulo 11, men at 11 er en kvadratisk rest modulo 7.

2) Vis, at -1 er en kvadratisk ikke-rest modulo 7 og 11.

3) Vis, at 2 er en kvadratisk rest modulo 7, men en kvadratisk ikke-rest modulo 11.

4) Stemmer alle delopgaverne overens med sætningen?

●● **Opgave 1.6.10:**
Betragt ligningen $x^2 - 5y^2 = 2$. Vi viser, at denne ligning ingen heltalsløsninger har for x og y.

1) Reducér ligningen modulo 5

2) Vis, at ligningen har en løsning modulo 5 hvis og kun hvis 2 er kvadratisk rest modulo 5

3) Vis, at ligningen ingen heltalsløsninger har. [Vink: sætning 1.5.15]

●●●● **Opgave 1.6.11: Tilfældet $p = 2$**

1) Opskriv samtlige andengradsligninger (dvs. ligninger på formen $ax^2 + bx + c = 0$) modulo 2. [Vink: koefficienterne a, b og c er hver især kongruente til enten 0 eller 1 modulo 2, så det er nok at betragte disse tilfælde. Husk dog, at $a \neq 0$!]

2) Hvilke af ligningerne har heltalsløsninger modulo 2? Find løsningerne til dem, der har.

●●●● **Opgave 1.6.12: Summer af kvadrater**
I denne opgave skal vi undersøge, hvilke primtal p, der er summer af to kvadrater, altså $p = a^2 + b^2$, hvor a og b er heltal.

1) Antag, at primtallet p er en sum af to kvadrater. Bevis, at $p = 2$ eller $p \equiv 1 \pmod 4$.
[Vink: brug opgave 1.6.6]

2) Hvilke af følgende primtal kan skrives som sum af to kvadrater?

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$$

●●●● Opgave 1.6.13: Andengradsligninger modulo p

En motivation for at kigge på kvadratiske rester angår løsninger til andengradsligninger modulo primtallet $p > 2$. Man kan vise, at et polynomium $ax^2 + bx + c \pmod{p}$ har rødder, netop hvis diskriminanten $D = b^2 - 4ac$ fra tidligere er en kvadratisk rest modulo p [4, p. 32].

1) Findes der rødder i polynomiet $3x^2 + 2x + 4 \pmod{5}$? Hvis ja, hvad er rødderne?

2) Findes der rødder i polynomiet $x^2 + 7x + 3 \pmod{11}$? Hvad med modulo 13?

Lad os til sidst se, hvordan dette kan bruges til at afgøre, om der findes heltalsrødder i et andengradspolynomium:

3) Findes der "almindelige" heltalsrødder i polynomiet $x^2 + 17x + 2$? [Vink: Benyt det ovenstående med sætning 1.5.15. Man skal ikke lede længe efter et n, der virker.]

●●● Opgave 1.6.14: Bikvadratiske rester

Definition 1.6.14. Et heltal $a \neq 0$ kaldes en *bikvadratisk/kvartisk rest* modulo et primtal $p > 2$, hvis der findes et heltal x, så $x^4 \equiv a \pmod{p}$. Ellers kaldes a en *bikvadratisk/kvartisk ikke-rest*.

Antag, at a er en bikvadratisk rest modulo p, hvor $p > 2$ er et primtal. Vis, at a også er en kvadratisk rest modulo p.

1.7 Videre læsning

Det ville være en skam at sige, at vi har dækket så meget som en brøkdel af talteori. Det er emnet simpelthen for stort til! Ikke desto mindre har vi nået at introducere de vigtigste begreber, og der er mange muligheder for at arbejde videre med teorien herfra. [4] og [13] er gode steder at starte, mens [11] er en god kilde til at lære noget grundlæggende gruppeteori, der bruges en del i talteori. Kan man godt lide at blande datalogi og matematik, gennemgår [19] talteori fra den vinkel og har desuden mange gode øvelser.

Kapitel 2

Fysik

2.1 Introduktion

Dette års Naturfagsweekend vil i fysik undervise i, at beregne de baner som en kanonkugle følger. Det kræver mest af alt en forståelse af *kinematik*, der er læren om *hvordan* ting bevæger sig. Sammen med *dynamik*, læren om *hvorfor* ting bevæger sig, danner det en komplet *mekanik*, som er en komplet teori, der fortæller os alt om bevægelsen.

2.2 Matematik

Ligesom i alle andre naturvidenskaber, spiller matematik en vigtig rolle i fysikken. Matematik er både det sprog vi bruger til at kommunikere fysiske sammenhænge, og samtidig et værktøj vi bruger til at løse problemer. I dette kapitel forudsætter vi derfor, at læseren er bekendt med algebraisk manipulation til løsning af simple ligninger. Hvis du ikke er helt sikker på hvad det betyder, så læs dette kapitel.

Algebra

Ligninger slipper man ikke uden om i fysikken, det kan være I har lært at løse en ligning før, men vi vil her give en kort forklaring. En fundamental regel er, at det du gør mod et element i din ligning, det gør du mod alle elementer i din ligning. Det kan forståes som, hvis du har ligeså mange lektier som din klassekammerat, kunne du opstille følgende ligning:

$$Dine\_lektier = Din\_vens\_lektier \tag{2.1}$$

Hvis i begge får 1 lektie mere for, så gælder ligningen for jeres mængde af lektier stadig, da I stadig har lige mange lektier for. Det kunne også være, at I begge klarede halvdelen af jeres lektier, så gælder ligningen stadig. Men hvis du klarer halvdelen af dine lektier, mens din kammerat ikke får lavet nogen, eller din klassekammerat får flere (ekstra) lektier for, så gælder ligningen ikke, da I så ikke længere har lige mange lektier for. I mange matematiske tilfælde beskriver vi *lektier*, eller hvad det nu er for en størrelse vi er interesseret i, med et x. Man vælger ofte x, da x kan betegne hvad som helst, f.x. lektier. Vi gengiver "*lektie ligningerne*" nedenunder, hvor x er mængden af lektier, som du startede med, og y er mængden af lektier, som din kammerat startede med. Hver side af lighedtegnet angiver, hvor mange lektier I hver især har nu.

I starter begge ud med den samme mængde lektier, men vi skriver dem her med symbolerne x og y:

$$x = y \tag{2.2}$$

I er hver især startet ud med x og y og I har begge fået en lektie mere, så nu har I følgende mængde lektier:

$$x + 1 = y + 1 \tag{2.3}$$

Er I hver især startet ud med x og y, og I har begge lavet halvdelen af jeres lektier, kan det skrives således:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} \tag{2.4}$$

Hvis vi indsætter og siger, at $x = 1$ i alle ligningerne, så skulle vi finde, at y har samme værdi i alle andre ligninger som i den første, da vi startede med at antage, at I havde fået den samme mængde lektier for:

$$1 = y \tag{2.5}$$

Her skriver vi, at y er 1, da vi indsatte $x = 1$ i $x = y$, derfor må y også være lig med 1 i de resterende ligninger.

Vi skulle gerne få samme resultat, når vi kigger på alle ligningerne som vi har gennemgået. Lad os derfor se på den anden ligning som vi gennemgik. I starter begge ud med x og y, og I har begge fået 1 lektie mere:

$$1 + 1 = y + 1 = 2 \tag{2.6}$$

Her får vi så en ny ligning $y + 1 = 2$, men hvis vi trækker 1 fra på begge sider, så må vi kunne finde ud af, hvad y er. Hvis vi formindsker begge sider med 1, så må de stadig være lige store, $20 = 20$ og $20 - 1 = 20 - 1 = 19$ har begge det samme stående på hver side af deres lighedstegn. Altså; 20 er ikke det samme som $20 - 1$, men $20 - 1$ er det samme som $20 - 1$. Trækker vi nu 1 fra på begge sider af ligningen:

$$y + 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \tag{2.7}$$

Så får vi at $y = 1$, fordi $y+1-1 = y+0 = y$, da $+1$ og -1 går ud med hinanden og giver 0.

Vi ser nu på ligningen, hvor I begge har lavet halvdelen:

$$\frac{1}{2} = \frac{y}{2} \tag{2.8}$$

Her bliver vi nødt til at gange med 2 på begge sider, det må vi igen godt, fordi fordobler vi begge sider, så må begge sider stadig være lige store. For eksempel så har $20 = 20$ og $20 \cdot 2 = 20 \cdot 2 = 40$ begge det samme stående på hver side af deres lighedstegn, ligesom tidligere, hvor vi trak det samme fra på begge sider.

$$\frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{y}{2} \cdot 2 = 1 = y \tag{2.9}$$

Så vi får altså igen, at $y = 1$, fordi $\frac{y}{2} \cdot 2 = y \cdot \frac{2}{2} = y \cdot 1$, da 2 halve giver 1 hel. Vi bemærker kort at alle regnerglerne også virker, hvis x og y ikke er lig med hinanden, som hvis du eller din ven gik i en klasse med ekstra lektier. Den første ligning skulle blot afspejle det.

Nu antager vi, at du starter ud med x lektier, og du har 1 lektie mere end din kammerat, der starter ud med y lektier. Dette kan udtrykkes i en ligning som denne:

$$x = y + 1 \tag{2.10}$$

Har vi så, at du får $x = 3$ lektier for, så må din kammerat få $y = 2$ lektier for, da $3 = 2+1$.

Forestil dig, at du får x lektier for, og du har en mindre søskende i en mindre klasse, hvor de får y lektier for, der er halvt så mange lektier, som du får:

$$x = y \cdot 2 \tag{2.11}$$

Nu kan vi prøve at sætte 2 ind som x og prøve at finde y:

$$2 = y \cdot 2 \tag{2.12}$$

Dette giver:

$$y \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = y \cdot \frac{2}{2} = 1 \tag{2.13}$$

Vi får altså, at din mindre søskende har 1 lektie for, hvis du har 2 og generelt bare dobbelt så mange som du har.

Konklusionen du kan tage fra det her er, at hvis du gerne vil isolere noget (det er hvad vi kalder det for når vi får noget til at stå alene, så for eksempel i udtrykket $x = y + 1$ er x isoleret), ligesom vi har gjort for at finde y, så skal du bare "anti"-gøre det, der påvirker den. I tabel 2.1 kan I se de forskellige regnetegn og deres modsætninger. Hvis du f.x. har et tal benævnt a, som du gerne vil fjerne fra den ene side i en ligning, f.x. i $x = y + a$, så skal du bare finde ud af, hvad den modsatte operation til + er, og her ville det være at trække fra, så $x - a = y + a - a = y$. Vi kan også prøve at indsætte $a = 1$ og se, at det passer $x - 1 = y + 1 - 1 = y$.

Tabel 2.1: Regneværktøjer og deres modsætning

Regneværktøj	Regnetegn	Modsætning	Anti-regnetegn
Lægge til	$a + b$	Trække fra	$a - b$
Gange	$a \cdot b$	Dividere	$\frac{a}{b}$
2. Potens	a^2	Kvadratrod	$\sqrt{a}$

Man skal bare huske, at gør du noget ved én ting, skal du gøre det ved alle ting, hvis du ligger 1 til på den ene side af lighedstegnet, så gør du også det på den anden side af lighedstegnet.

Hvis du fordobler et led, så gør du det på alle led, (her er et led bare tal ganget sammen og led på samme side af et lighedstegn er adskilt af + eller −, så $2 \cdot 3$ eller $x \cdot y$ er hver et led, men $2 \cdot 3 + x \cdot y \cdot z$ er to led og $1 \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot 4 + x \cdot y$ er tre led, da det er tre forskellige ting, der hver for sig er ganget sammen, som lægges sammen. Dette er illustreret i følgende ligning:

$$\underbrace{1 \cdot 2}_{\text{1. led}} = \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 4}_{\text{2. led}} + \underbrace{x \cdot y}_{\text{3. led}}$$

Se på det som, at du har 4 forskellige bunker, der har en eller anden samlet vægt, og hver bunke har sit materiale f.x. stål, pap, plast og træ. Den samlede vægt er altså:

$$\text{total} = \text{stål} + \text{pap} + \text{plast} + \text{træ}$$

Skal du fordoble den samlede vægt, så skal du fordoble vægten af dem alle sammen:

$$2 \cdot \text{total} = 2 \cdot \text{stål} + 2 \cdot \text{pap} + 2 \cdot \text{plast} + 2 \cdot \text{træ}$$

Vi kan ikke bare fordoble stål og sige, at den samlede vægt er fordoblet, da de hver især giver deres eget tillæg til den samlede vægt.

For at simplificere den formel, så vil vi bruge en parentes altså "()", det gøres således:

$$2 \cdot \text{total} = 2 \cdot (\text{stål} + \text{pap} + \text{plast} + \text{træ})$$

Parentesen siger at indholdet inden i den skal regnes først. I dette tilfælde kan man så enten gange det, der står udenfor parentesen ind, i dette tilfælde 2 tallet, på alle ledene indeni parentesen, så får vi:

$$2 \cdot (\text{stål} + \text{pap} + \text{plast} + \text{træ}) = 2 \cdot \text{stål} + 2 \cdot \text{pap} + 2 \cdot \text{plast} + 2 \cdot \text{træ}$$

ELLER man kan lægge stål sammen med de andre bunker først og så gange med 2. Dette er dog svært at illustrere med dette eksempel, da det ikke rigtig giver mening at lægge f.x. stål og træ sammen.

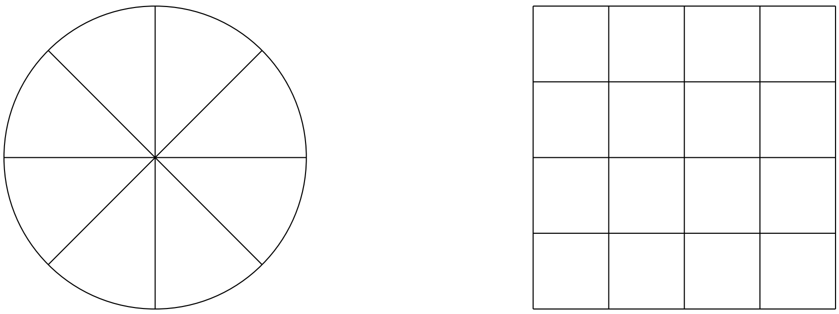
Set på samme eksempel men med penge, så om du får det dobbelte af 100 kr. og så får det dobbelte af 150 kr., eller om du får 100 kr. og 150 kr. og så får fordoblet, hvad du har lige har fået, så giver det samme resultat:

$$(100 + 150) \cdot 2 = 100 \cdot 2 + 150 \cdot 2 = 200 + 300 = 500$$
$$(100 + 150) \cdot 2 = (250) \cdot 2 = 500$$

Brug af parenteser er noget, som vi gør meget brug af i fysikken, fordi det gør vores formler enklere, f.x. med vores bunker ville vi ikke behøve at skrive gange 2 hele tiden, men kun én gang.

Regneregler for brøker og potenser

I dette afsnit vil der blive gennemgået forskellige regneregler, der ofte bliver brugt, når man løser forskellige ligninger i fysik. Der vil kort blive gennemgået, hvad brøker og potenser er, og hvordan man regner med dem. Til sidst i afsnittet vil regnereglerne være skrevet op på en generel form, selvom regnereglerne vil blive udledt ved brug af specifikke tal.



Figur 2.1: Repræsentation af brøker.

På figur 2.1 kan I se nogle figurer, der er delt op i mindre dele. Det er i princippet det, som vi gør med brøker. Vi har mindre dele af en hel enhed. For eksempel er et klassisk eksempel en halv eller $\frac{1}{2}$, men hvis man har to halve, altså $\frac{2}{2} = 1$, kan man konstater, at to halvdele giver en hel.

Dette virker ikke kun med halve, det gælder ligemeget hvor mange dele, som du vælger at inddele din enhed i. Har du har alle de mindre dele, så har du også den hele. Vores eksempel med to halve, gælder altså for alle tal, om det er halvfjerds eller 30 millioner, så halvfjerds halvfjerdsindstyvendedele er en hel, det samme skrevet med matematik er: $\frac{70}{70} = 1$.

Det er sådan, vi ofte arbejder med brøker, vi vil gerne have tingene giver 1, fordi så går de ud, eller rettere er ligegyldige, det betyder nemlig ikke så meget, hvis vi ganger med 1, fx. $1 \cdot 2 = 2$, vi kan altså bare skrive 2 i stedet for regnestykket. Der findes et tal, som vi ikke kan have dele af, det er 0, derfor er det påkrævet at det nederste i brøken ikke er nul

Opgave 2.2.1: Næ-nej, det må man ikke! Prøv at tænke dig til, hvad man får, hvis man dividerer med 0.

Vi kan dog have en situation, hvor vi ganger brøker sammen, fx. en halv gange en halv eller halvdelen af en halv $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, halvdelen af en halvdel er en fjerdel, altså $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, det får vi ved at *gange lige over*, altså $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$. Det gælder selvfølgelig også for alle andre tal, bare vi husker vores regel med ikke at dividere med nul! Det modsatte kan også gøres, at *dividere* med brøker, hvilket kan være bøvlet nogle gange, men man gør i realiteten det samme. fx. $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$, her ved vi jo svaret er 1, da det er et tal divideret med sig selv. men i realiteten står der jo faktisk $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}}$, hvilket vi kan regne med den forrige regel som $= \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{2}{2}} = \frac{1}{1} = 1$ og minsandten så gav det 1.

Men vi kan også se det på en anden måde, hvor vi i stedet flytter rundt på den nederste del af brøken. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}}$, hvis vi halverer hvad *heleheden* er, så må vi have en dobbelt så stor del af helheden, altså hvis du nåede 1 ud af de 2 ting du skulle, har du $\frac{1}{2} = 0,5$, men hvis du kun skulle klare halvdelen altså 1, så $\frac{1}{\frac{2}{2}} = \frac{1}{1} = 1$, så har du nået det dobbelte af hvad du skulle opnå, ift. hvad du havde før. Det hænger altså sådan sammen, at hvis du dividerer den nederste del af brøken med noget, så kan du også bare gange med det samme, i vores tilfælde $\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Igen gælder dette for alle tal, så længe vi ikke dividerer med 0. Regneteknikken kan også huskes på, at man skal *gange omvendt*, ift. når vi ganger brøkerne *lige over*. Du ganger altså toppen på den ene med bunden på den anden og bunden af den ene med toppen af den anden. Dette gjorde vi her, ved at gange toppen 1 med bunden af det den bliver divideret med '$\frac{1}{2}$', altså 2, og bunden bliver ganget med 1. Skrevet på matematik-sprog:

$$\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1 \tag{2.14}$$

Så kan vi også have brøker, der lægges sammen, fx. to halve, som vi ved giver 1, det gør man matematisk således: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$, man lægger altså bare *delene* sammen. Det gælder dog kun hvis det er med ens bunde. fx:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \neq \frac{1+1}{2}, \neq \frac{1+1}{4} \tag{2.15}$$

Her er vi nødt til at sørge for at vi har ens nævnere, det gør vi ved at forlænge de to brøker, fx $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4}$ Vi får i vores eksempel i ligning ligning (2.15):

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{5}{8} \tag{2.16}$$

Nogle gange kan vi have at bunden er beskrevet ved en sum, fx. $\frac{1}{-1+1}$, den brøk må vi ikke have, da vi dividerer med 0 altså $\frac{1}{-1+1} = \frac{1}{0}$, så selvom der ikke direkte står 0, så kan det stadig være *ulovligt*, så hvis vi har en vilkårlig brøk $\frac{a}{b+c}$, så må det gælde at $b + c \neq 0$, fordi ellers er brøken *ulovlig*!

Nogle gange er det nyttigt at kunne gange det samme tal med sig selv flere gange. For eksempel kan man ønske sig at skulle gange 2 med sig selv 4 gange: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Dette kan dog skrives på en nemmere måde ved at bruge potenser:

$$2^4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4} = 16$$

På denne måde er det muligt at skrive nogle udtryk på en mere kompakt form:

$$2^4 = 16$$

Her kaldes tallet 2^4 for en potens, så når vi snakker om at opskrive en potens, så mener vi at opskrive et tal på den måde. I dette tilfælde kaldes tallet 2, der er farvet blåt, for *grundtallet* og tallet 4, der er farvet rødt, kaldes for *eksponenten*.

Der skal nu undersøges, hvad der sker, når forskellige udtryk med potenser kombineres, og i slutningen af dette afsnit vil regnereglerne være skrevet op på en generel måde.

Hvad sker der for eksempel, når hele den forrige ligning opløftes i tredje?

$$(2^4)^3 = \overbrace{\underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{4} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{4} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{4}}^{3 \cdot 4 = 12} = 2^{12} = 2^{4 \cdot 3}$$

Det kan således ses, at opløftes en potens med en eksponent, så ganges eksponenterne sammen.

Hvad sker der mon, når to potenser med samme grundtal men forskellige eksponenter divideres med hinanden?

$$\frac{2^5}{2^2} = \frac{\overbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}^{5}}{\underbrace{(2 \cdot 2)}_{2}} = \overbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}^{3} = 2^3 = 2^{5-2}$$

Det kan således ses, at divideres to potenser med samme grundtal så fratrækkes eksponenten fra potensen i nævneren fra potensen i tælleren.

Er det derimod to potenser med forskelligt grundtal men samme eksponent, der divideres med hinanden gælder følgende:

$$\frac{2^3}{5^3} = \frac{\overbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}^{3}}{\underbrace{(5 \cdot 5 \cdot 5)}_{3}} = \underbrace{\left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right)}_{3} = \left(\frac{2}{5}\right)^3$$

I dette tilfælde kan hele brøken sættes som grundtal og den fælles eksponent som den nye eksponent.

Er det nu to potenser med forskelligt grundtal og samme eksponent, der ganges med hinanden sker følgende:

$$2^3 \cdot 5^3 = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{3} \cdot \underbrace{(5 \cdot 5 \cdot 5)}_{3} = \underbrace{(2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5)}_{3} = (2 \cdot 5)^3$$

Produktet af de to grundtal bliver således det nye grundtal opløftet i den gamle eksponent.

Ganges to potenser med samme grundtal sker følgende:

$$2^3 \cdot 2^2 = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{3} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2)}_{2} = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{5} = 2^5 = 2^{3+2}$$

Grundtallet forbliver således det samme, og den nye eksponent bliver summen af de to eksponenter.

De regneregler, der er blevet gennem gået i dette kapitel, står her til sidst på en mere generel måde [20], hvor bogstaverne a, b, c og d kan være forskellige tal, medmindre andet er angivet. For eksempel kan man i ligning (2.17) bruge $a = 3$, $b = 9$ og $c = -5$, hvilket giver $3 \cdot 9/(-5) = 27/(-5)$.

Brøkregneregler:

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}, \quad c \neq 0 \tag{2.17}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad b \neq 0, d \neq 0 \tag{2.18}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}, \quad b \neq 0, c \neq 0 \tag{2.19}$$

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}, \quad b \neq 0 \tag{2.20}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \quad b \neq 0, c \neq 0 \tag{2.21}$$

$$\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}, \quad c \neq 0, a \neq 0 \tag{2.22}$$

Potensregneregler:

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}, \quad a > 0 \tag{2.23}$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad a \neq 0 \tag{2.24}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0 \tag{2.25}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0 \tag{2.26}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \tag{2.27}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{2.28}$$

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0 \tag{2.29}$$

2.3 Centrale begreber

Her vil vi introducere dig for nogle størrelser, der er vigtige for at forstå hvordan en kanonkugle flyver.

Position

Det, vi i sidste ende er mest interesserede i at kende, for at beskrive en bevægelse, er positionen. Positionen betyder blot *hvor* objektet er, og kender vi positionen til alle tidspunkter, har vi beskrevet bevægelsen fuldstændigt. I fysik er vi meget inkluderende, og det at stå stille er derfor også en slags bevægelse, faktisk den der er enklest at beskrive. f.eks. (Hun stod ved busstoppestedet i 3 timer). Position måler vi ofte i meter, da vi først bestemmer os for et nulpunkt, som bevægelsen måles ud fra. (Hvis vi valgte busstoppestedet som nulpunkt i forrige eksempel, ville hendes position være 0m). Derfor skriver vi SI-enheden for position som 1 m

Lad os tage et eksempel. Vi vælger en tavle som udgangspunktet for bevægelsen, og siger at retningen for bevægelsen er vinkelret på tavlen. Bevægelsen kunne starte med at personen står 2 meter væk fra tavlen. Når vi beskriver en bevægelse, så kunne man f.eks. beskrive start- og slutpositionen, så at personen startede 2 meter væk fra tavlen og sluttede 4 meter væk. For at regne den afstand personen gik, så benytter vi en afstandsformlen for 2 punkter:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \tag{2.30}$$

I den formel betyder Δx den afstand der er bevæget, x_1 er startpositionen og x_2 er slutpositionen. I fysik benytter vi ofte det græske Delta, Δ, til at beskrive ændring, hvor vi her beskriver ændringen af position. Vi finder, hvis vi indsætter startpositionen, $x_1 = 2\,\mathrm{m}$, og slutpositionen, $x_2 = 4\,\mathrm{m}$, så får vi $\Delta x = 4\,\mathrm{m} - 2\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{m}$

I fysik er vi ofte dovne, så derfor gør vi livet nemmere ved at bruge startpositionen som vores nulpunkt. Altså, i eksemplet med tavlen ville vi vælge 2 meter fra tavlen som nulpunktet, og derfor at personen startede ved afstanden 0 meter fra sin startposition (da det er der personen starter) og hun slutter med afstanden 2 meter væk derfra. Hvis vi vil regne afstanden, er det nu meget lettere, da startafstanden er $x_1 = 0\,\mathrm{m}$ det giver os formlen:

$$\Delta x = x_2 - 0 = x_2 \tag{2.31}$$

Så er det tydeligt at hvis jeg slutter min bevægelse en afstand væk fra vores startposition, så har vi netto bevæget os den afstand. (Det kunne jo tænkes at personen først gik 5 meter væk, og så tilbage til 2 meter væk, så ville hun netto have bevæget sig 3 meter, men have rejst 7 meter.)

Det kan godt være at i tænker at det måske giver sig selv. Men det gør vores udregninger bare den lille smule nemmere, udover det er det er det også lettest for os alle, hvis vi benytter samme udgangspunkt hver gang, så begår vi nemlig færre fejl.

Det absolut vigtigste er at vi måler position ud fra samme punkt hver gang. Hvis vi målte hendes startposition ift. tavlen til 2 meter, men hendes slutposition måler vi ift. solen så er personens startposition 2 meter men slutpositionen er flere milioner kilometer, selvom hun bare bevægede sig 2 meter.

Indtil nu har vi kun tænkt på det enkle tilfælde at bevægelsen kun forgik i én retning. Det er der mange ting i verden der opfylder(elevatorer, rulletrapper, 100m-løbere osv.), men der findes også situationer hvor objekter ikke bevæger sig på en ret linje. (Kanonkugler, planeter, penduler osv.) For at beskrive dette, må vi først forstå begrebet*dimensioner*.

Dimensioner

Du har måske hørt, at vi bor i en tredimensional verden[1], men hvad vil det egentlig sige? Det betyder, at vi kan skelne mellem tre forskellige vinkelrette linjer i rummet; op/ned, højre/venstre og frem/tilbage.

Opgave 2.3.1: en 4. Linje?1 Prøv at tænke dig til en fjerde linje, der er vinkelret på de tre andre.

Du skulle gerne nå frem til, at opgave 2.3.1 ikke kan lade sig gøre. Det er derfor vi siger, at vi bor i en tredimensional verden[2]. I begyndelsen vil vi for nemhedens skyld holde os til at arbejde med én dimension. Det vil sige, at alting foregår på den samme linje, eller sagt på en anden måde, så er der kun to retninger man kan gå, nemlig frem og tilbage. Senere bliver vi nødt til at gå til to dimensioner, for at beskrive den bane en kanonkugle flyver. Kan du gennemskue hvorfor vi ikke behøver bruge 3 dimensioner til det?

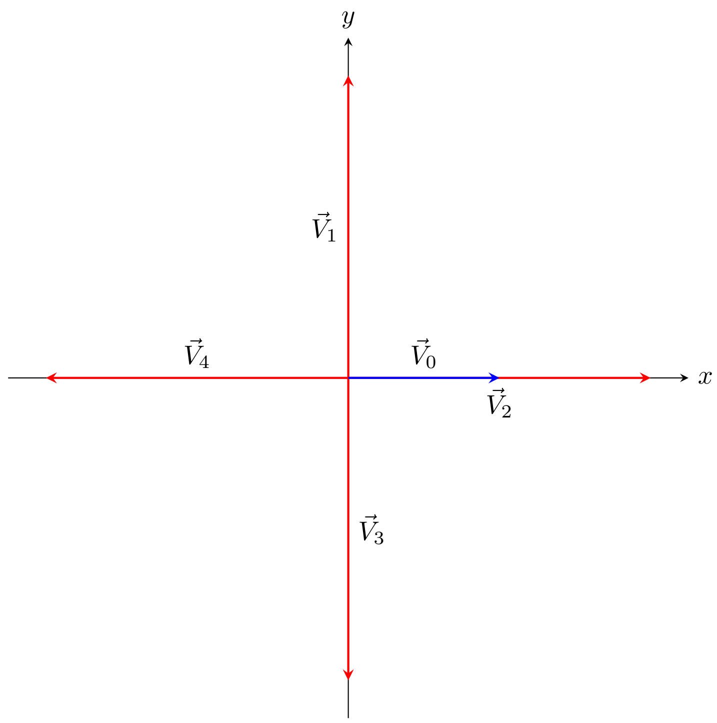
Vektorer

Når vi har kigget på position, har vi mest af alt bare behandlet det som tal. At vi er 2 meter fra en ting. En vektor er kort sagt, et tal med en retning, ofte benytter vi en pil til at billedliggøre vektorer.

Forskellen mellem at bruge vektorer og tal til at beskrive position og dens ændring er, at vi med tal blot sagde at personen havde 2 meters afstand og så 4 meters afstand i eksemplet med tavlen, hvilket var en ændring på 2 meter. Med vektorer ville vi sige, at hun stod 2 meter væk fra tavlen mod nord og at hun sluttede 4 meter mod nord ift. tavlen, derfor havde hun flyttet sig 2 meter. Men hvis hun i stedet havde sluttet sin bevægelse 4 meter mod syd ift. tavlen eller mod vest eller øst, så ville det ikke være det samme, da vi ville være helt anderledes steder. Det her er lidt nemmere at visualisere, hvis vi indtegner det i et koordinatsystem

[1]Med det mener vi 3 rummelige dimensioner. Derudover har vi en tidslig dimension, men den skiller sig lidt ud fra de andre. Hvis du vil vide mere om dette, så find en god bog om speciel relativitetsteori

[2]Mere formelt kan man sige at der er tre *lineært uafhængige* retninger



Figur 2.2: Vektorer i planet(xy koordinatsystem)

Vi bruger vektorer til mange ting, blandt andet i figur 2.2 fandt vi afstanden mellem to punkter. Lige præcis det eksempel kunne vi nok have klaret uden at introducere vektorer, men senere vil vi få brug for dem.

Derfor vil vi lige gennemgå hvordan man skriver vektorer op og regner med dem. Langt hen af vejen, så ligner vektorer tal, vi kan lægge dem sammen og trække dem fra hinanden, men vi kan ikke dividere eller gange dem sammen.[3] Måden vi skriver en vektor op på er meget ligesom koordinaterne for et punkt i et koordinatsystem, det er bare tradition at skrive tallene oven på hinanden i stedet for ved siden af hinanden, så man kan kender forskel på et punkts og en vektors koordinater, men de fungerer på præcis samme måde. Hvis vi har en vektor, som har 2 i første indgang og 1 i den anden, så går den 2 ud af x-aksen og 1 op af y-aksen.

Men der står egentlig intet om hvorhenne i rummet den vektor er! Vektoren består kun af to ting: en retning og en længde. Tænk på en vektor der bare peger langs x-aksen og har længden 1. Den kan eksistere hvor som helst og være den samme vektor, det betyder altså med andre ord ikke noget hvor vektoren er men kun hvor lang den er og hvor den peger hen. Tænk på det som at du flytter pilen rundt på koordinatsystemet, men uden at rotere den. (da det ville ændre dens retning)

For at hoppe tilbage til figur 2.2 har vi vektorer der peger lige ud i 4 retninger samt startpositionens vektor, de kan beskrives som:

$$V_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad V_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Når vi lægger vektorer sammen og trækker dem fra hinanden, så gør vi det bare lige over, vi trækker altså x-værdierne fra hinanden for sig og y-værdierne for sig.

[3]Der findes prik- og krydsproduktet, som man benytter for at "*gange*" vektorer sammen, men det er ikke multiplikation, som I kender det, og vi kommer ikke til at benytte det her.

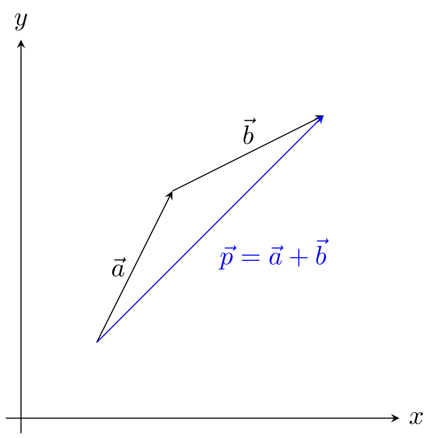
Hvis vi f.eks. tog $V_1 + V_2$ så ville vi få et 4 tal i begge indgange. Det kan ses grafisk som at man tager den ene vektor og bare sætter den på spidsen af den anden. Resultatet er så den vektor der går fra den førstes hale, tin den andens spids.

Man kan også gange tal på vektorer. Forestil dig at du ganger en vektor med 2. Det må betyde at lægger en vektor sammen med sig selv, så lægger vi dens tvilling på næsen af den og sammen er de dobbelt så lange som før, men peger i præcis samme retning. På ligningsform ser det sådan ud:

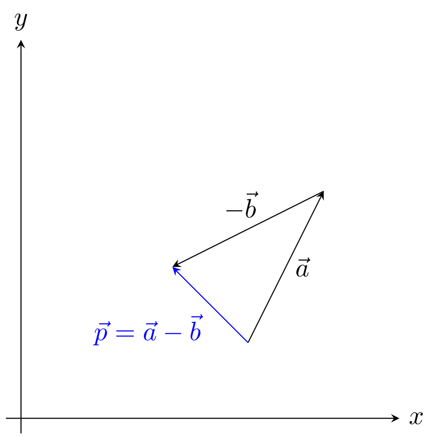
$$2 \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot V_x \\ 2 \cdot V_y \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

Naturligvis gælder præcis det samme for et vilkårligt andet tal end 2.

Hvis vi i stedet tager $V_1 - V_2$ så trækker vi fra i begge indgange hver for sig, kan du så se at den resulterende vektor vil have -4 i første- og 4 i anden indgang? Det ser vi som at man laver en vektor fra den ene spids til den andens spids, fra den der trækker fra til den som der trækkes fra.



Figur 2.3: Addition af to vektorer i planet(xy koordinatsystem)



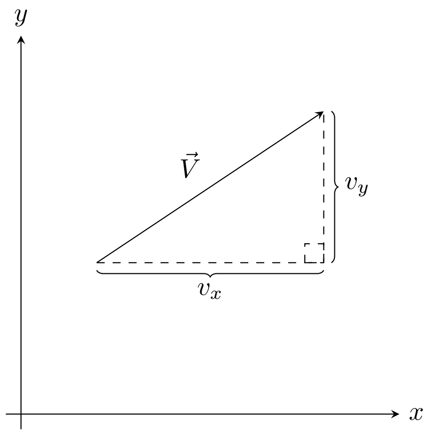
Figur 2.4

Så vektoren mellem et objekts start- og slut-position finder vi ved at trække vektoren for objektets startposition fra dets slutposition. (Hov, det var jo også sådan vi fandt afstanden før, bare uden vektorer.) Nu har vi vektoren, men hvor lang er den så? (Altså hvor langt har objektet bevæget sig?) Her bemærker vi at en vektor i 2 dimensioner er hypotenusen i en retvinklet trekant, hvor længderne af kateterne er indgangene i vektoren. Kan du set det på figur 2.2? For at finde længden af en hypotenuse, så skal vi bare lave et kort opkald til den gamle græker Pythagoras og bruge hans smukke korte sætning:

$$C^2 = A^2 + B^2 \tag{2.33}$$

Hvis vi smider kvadratroden på og skriver det så det passer til vores vektorer

$$|V| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{2.34}$$



Figur 2.5

I ligning (2.34) er den formel for længden af en vektor som vi vil bruge, der findes en mere generel en men vi benytter den ikke her. De små v'er referer til det store V's indgange og de to lodrette streger rundt om det store V skriver vi for at sige "*længden af* V".

Opgave 2.3.2: Hvor langt gik jeg? Hvis jeg gik fra min startposition til der, hvor V_1 peger (i figur 2.2) (4 meter opad), hvor langt er jeg så gået?

Hastighed og fart

Nu har vi talt lidt om ændring af position og vektorer, så nu er vi til at tale om hastighed og fart. I har sikkert hørt om hastigheder som kilometer i timen, meter i sekund eller meter per sekund. Her tales der om en afstand, som f.eks. meter, over et stykke tid, f.eks. sekunder. hastigheden 1 meter per sekund, det skrives som $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, fortæller at der bevæges 1 meter hver gang der går et sekund.

Hastighed har altid en retning, man kan have en hastighed på $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ mod nord eller vest eller op eller ned, (Hvis vi definerer op som positiv retning, ville man have en negativ op/ned hastighed hvis man bevægede sig ned) vi bruger af den grund vektorer til at vise hastigheder, da de jo netop også har en størrelse (hvor hurtigt bevæger vi os) og en retning(hvor bevæger vi os hen).

Negative hastigheder taler vi sjældent om i dagligdagen da vi altid forestiller os at man bevæger sig i den positive retning, eller at man bevæger sig altid fremad. Af den grund kan man tit komme til at benytte fart og hastighed, hip som hap, men det skulle man helst ikke gøre, da de er to vidt forskellige ting, fart har nemlig ingen retning.

"*Fart*" er det ord vi bruger til at beskrive længden af hastighedsvektoren

Når vi har en konstant hastighed, så har vi en anden afstandsformel:

$$\Delta x = v \cdot \Delta t \tag{2.35}$$

Så f.eks. noget der bevæger sig $2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ i 1 s har bevæget sig, $\Delta x = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{m}$. Det er let at aflæse og det giver god mening, at hvis man bevæger sig i længere tid så kommer man længere frem og hvis man bevæger sig hurtigere over den samme tid så kommer man også længere. En anden god måde at huske denne formel på er, at huske hvilke enheder hastighed, tid og afstand har. Hvis man kan huske det, er der kun én måde at kombinere de tre størrelser på, hvor enhederne går op. Det er nemlig sådan at enhederne på hver sin side af lighedstegnet skal være de samme. Hvis vi vælger at afstanden skal stå på venstre side og husker at den har enheden meter, kan vi kun sætte tid og hastighed sammen på én måde hvor de også giver enheden meter på højre side af lighedstegnet.

$$m = s \cdot \frac{m}{s} = m \tag{2.36}$$

Denne måde at 'regne' med enheder er utrolig nyttig til at huske hvordan formler ser ud.

Nogle gange kender vi kun hvad tid en bevægelse tog og hvor langt vi bevægede os. Eller sagt på en anden måde, tiden det tog for noget at bevæge sig en afstand, Δx. Hvis vi så vil kende dens hastighed, gør vi det ved at isolere v i ligning (2.38), hvilket vi gør ved at dividere med tiden:

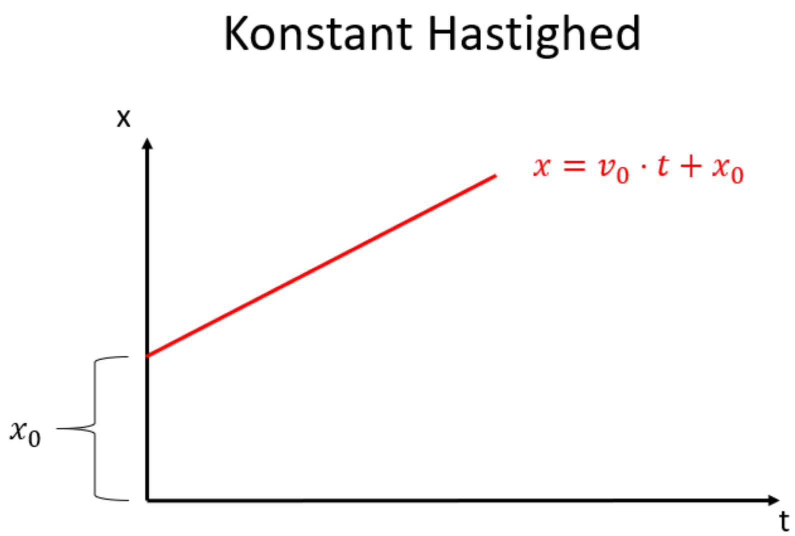
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.37}$$

Så vi kan finde hastigheden ved måle en afstand og dividere den med tiden det tager at krydse den afstand.

Det vi har kigget på er konstant hastighed, vi har ikke talt om **acceleration**, eller sagt anderledes hastighedsændring, det gør vi først i næste afsnit. Først vil vi kigge på nogle grafer. Da vi skrev afstandsformlen, ligning (2.38), op så kunne i måske genkende at den ligner funktionen for den rette linje. Vi kunne skrive det op som en funktion af t, ligesom vi skriver $y(x)$ eller $f(x)$:

$$x(t) = v \cdot t + x_0 \tag{2.38}$$

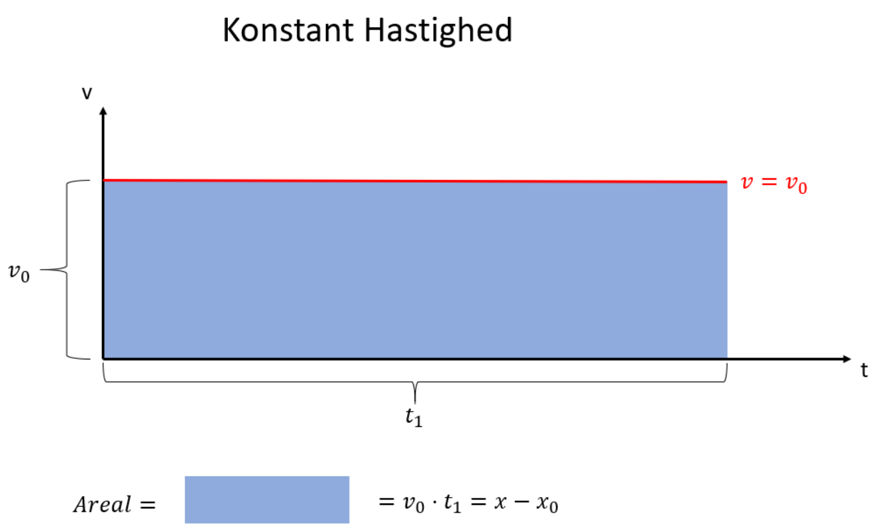
Her har vi tilføjet startpositionen x_0 bare for at skrive det helt generelt, hvis vi nu ikke kendte den position eller hvis det giver mere intuitiv mening at have den afstand, den kunne jo altid sættes til 0.



Figur 2.6: x mod t for bevægelse med konstant hastighed.

Se på figur 2.6, hver gang vi går 1 s ud af tidsaksen, så går vi $v \cdot 1\,\text{s}$ op af x-aksen. Vi ved godt det kan være lidt forvirrende at have x-aksen som den der peger op, men generelt så har man tid ud af den vandrette akse fordi det giver mere intuitiv mening og fordi det er tradition. Det giver mere mening at hvor noget er i bevægelsen hænger sammen med hvornår man kigger hellere end at det tidspunkt man kigger hænger sammen med hvor i bevægelsen noget er. Eller sagt på en anden måde, tiden er den uafhængige variabel, mens positionen er den afhængige variabel.

Hvis vi tegner hastigheden ud af den lodrette akse og tiden ud af den vandrette igen, så med vores konstante hastighed så får vi en helt flad linje.



Figur 2.7: v mod t for bevægelse med konstant hastighed.

Hvis vi vil tage finde arealet af den firkant, så er den v lang og t bred. Det giver os altså at arealet er $A = v \cdot t$ og det ser vi hurtigt er det præcis samme som vores simple afstandsformel ligning (2.38)

Det her med at arealet under en graf giver os en anden graf er en forsimpling af noget kaldet *integraleregning* som vi ikke vil gå videre ind i da det er en smule komplekst og langt (I lærer det på gymnasiet). For nu, så må vi bare acceptere at arealet under hastighedsgrafen er det samme som afstanden. Dette vil vi bruge i afsnittet om acceleration.

Acceleration

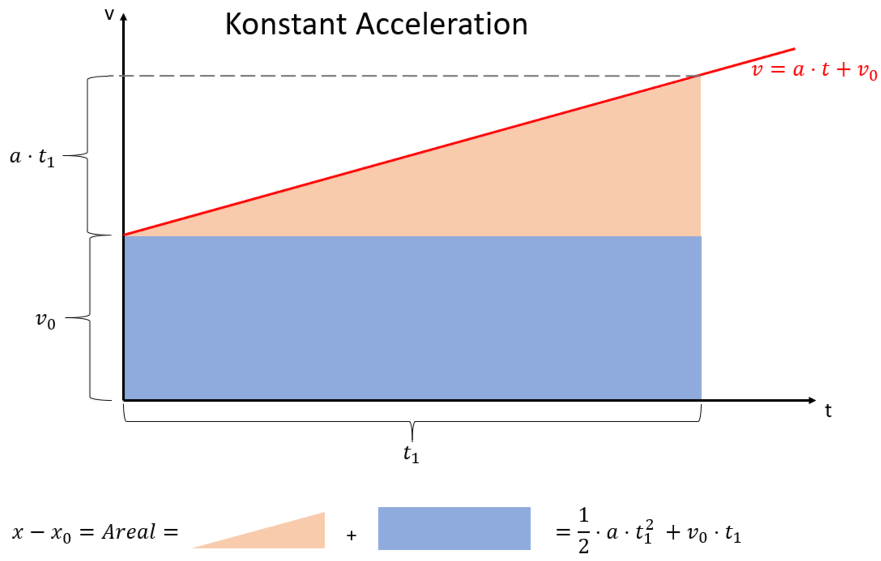
Acceleration er det ord vi bruger til at beskrive ændring i hastighed ligesom hastighed beskriver ændring i position. Sagt på en anden og mere forvirrende måde er acceleration ændringen på ændringen af positionen. Acceleration bliver skrevet med SI-enheden 1 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, som beskriver at hvert sekund stiger hastigheden med 1 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, selvfølgelig ville 2 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ beskrive at hvert sekund stiger hastigheden med 2 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Sammenhængen med hastighed og konstant acceleration kan altså skrives med formlen:

$$v = a \cdot t + v_0 \tag{2.39}$$

Det giver os igen en lineær graf, denne gang er det for hastigheden, selvom den ligner afstandsformlen meget. Det giver fin mening, for acceleration er til hastighed, hvad hastighed er til position. Måske kan i begynde at se et system? Hvis vi stadig stoler på at arealet under hastighedengrafen giver afstanden vi har bevæget os, så kan vi nu udlede en formel for afstand.

Vi kan se at arealet kan deles op i en trekant og en firkant.



Figur 2.8: v mod t for bevægelse med konstant acceleration.

Så hvis vi ligger de to figurers areal sammen får vi:

$$x = \frac{1}{2}a \cdot t^2 + v_0 \cdot t \tag{2.40}$$

Hvis vi ligger den ukendte startafstand til, så får vi den generelle ligning:

$$x = \frac{1}{2}a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0 \tag{2.41}$$

Og fra nu af er ligning (2.41) den formel vi referer til hvis vi taler om afstandsformlen, da den er den mest generelle at arbejde med på vores niveau. Den formel virker kun når vi har konstant acceleration.

Opgave 2.3.3: At kaste bolde fra det høje tårn Hvis jeg står på toppen af et højt tårn og kaster en bold nedad, så den starter med at have en hastighed på 1 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ og den accelerer med (en lidt forenklet) tyngdeacceleration på $g = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, og det tager bolden 10 s at falde til jorden, hvor højt er tårnet? (hint: bolden vil ramme jorden ved $x = 0$ og højden af tårnet er x_0

Galileo Galilei viste med sit berømte eksperiment, hvor han smed en let og en tung kugle ud fra det skæve tårn i Pisa, at alle objekter accelereres lige meget af tyngekraften. Det er derfor en konstant acceleration, som vi alle kender. Det er den vi vil arbejde med her. Vi har igennem denne sektion brugt a som symbol for accelerationen, men med tyngeaccelerationen benytter vi ofte et g og den har i Danmark værdien 9,82 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

2.4 Newtons love

Sir Isaac Newton, fandt frem til 3 love der til sammen beskriver klassisk mekanik. Mekanik værende kombinationen af kinematik (hvordan ting bevæger sig) og dynamik (hvorfor ting bevæger sig), her betyder ting bare noget med masse som vi her også kalder inerti.

Den første lov, *loven om inerti*, siger kort sagt at hvis noget bevæger sig, så fortsætter det med at bevæge sig, hvis noget står stille så fortsætter det med at stå stille, medmindre en kraft accelerer eller deaccelerer den. Altså, et legeme der ikke påvirkes af nogen kræfter, vil bevæge sig i en ret linje uden at ændre sin hastighed. (Altså en bevægelse med konstant hastighed)

Den anden lov, som er loven man oftest vil referere til er: En masse, der påvirkes med en resulterende kraft, har en acceleration som opfylder:

$$F_{res} = m \cdot a \tag{2.42}$$

Det vil vi tale mere om når vi snakker om kræfter. Lad os nu definere interti. Det er *trægheden* mod at ændre hastighed eller lysten til ikke at ændre hastighed. Faktisk er den masse, der indgår i ovenstående, objektets inerti. Det viser sig at i vores univers er masse=inerti[4] Hvor masse betegner hvor kraftigt tyngdekræften trækker i objektet.

Den tredje lov, *loven om aktion og reaktion*. Loven siger at enhver aktion har en lige og modsatrettet reaktion. Sagt på en anden måde så når du slår en ting, så slår den lige så hårdt tilbage. Det er grunden til at når du skubber en væg, så føler du en modsand, det er væggen, der skubber igen. Det er også årsagen til at skydevåben har rekyl, altså at nå de skubber kulgen fremad, skubber kuglen våbnet tilbage.

Kræfter

Nu har vi kort fortalt om Newtons 3 love og vil nu begynde at forklare om kraft (eller *force* på engelsk). Kræfterne er hvad der ifølge loven om inerti skal til for at skabe bevægelse.

Vi ser kræfter konstant og over det hele. Jorden trækker os nedad, jorden skubber os opad, så vi ikke bare falder igennem jorden (der ser vi loven om aktion og reaktion). Al bevægelse kan ses som skabt af kræfter.

Den resulterende kraft, altså den kraft som man faktisk ser eller føler, den ved vi, per Newtons anden lov, er lig med ligning (2.42). Når vi kun har én kraft, for eksempel mig der skubber en bold, så kan vi altså finde hvor hårdt jeg skubber direkte ud fra hvor hurtigt bolden accelererer og hvor tung den er.

Og det er her, som I nok selv har indset, at vi har relationen mellem kraft og bevægelse, i en dejlig sød lille formel der kun indeholder 3 ting. Hvis vi ved hvor hårdt noget skubber og hvor tung den ting der skubbes er, så kender vi dens acceleration og hvis vi kender kraften og accelerationen så kan vi sågar udregne massen.

Men hvad måler man kræfter i? Tjo, siden formlen for den er vægt gange acceleration, så må enheden af kraften også være det. Standardenheden for kræfter kaldes Newton og skrives som f.eks. $1\,\mathrm{N}$ som så er det samme som $1\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Opgave 2.4.1: Spark en bowlingkugle Hvis jeg sparker en bowling kugle med en kræft på $10\,\mathrm{N}$ på en bowling kugle som vejer $10\,\mathrm{kg}$ hvor hurtigt accelerer den så?

Men, hvad nu hvis der er flere ting der skubber og trækker? bliver det så noget værre kompliceret noget? Næh, vi skal bare finde ud af hvad summen af de kræfter der påvirker objektet er. Denne sum giver så den resulterende kraft. Her er det vigtigt at huske at kræfter er vektorer.

Lad os tage et tænkt eksempel: Hvis vi kigger på en mursten der ligger på et bord, så trækker tyngdekraften murstenen ned i borden med en kraft F_{M1}, hvis vi nu ligger endnu en mursten ovenpå, så trykker endnu en mursten på bordet med en kraft F_{M2}, men da murstenene er ens så må de egentlig have samme kraft. Bordet mærker en eller anden tredje kraft F_{B1}, Men hvis vi i stedet i stedet bare tog en dobbelt så stor mursten og satte på bordet uden nogen andre så skubber den med F_{M3} og det må jo så være kraften bordet føler, F_{B2}. Hvis vi forestiller os at de to mursten har samme størrelse og at den anden er dobbelt så stor, hvad er forskellen så mellem de to situationer egentlig?

[4]Når man ikke bevæger sig med tæt på lysets hastighed

Bordet ved jo ikke at der er to mursten på hinanden, den ved bare den har noget tungt der skubber på den, så det må skubbe lige meget, altså $F_{B1} = F_{B2}$

Deres kræfter kommer af tyngdekraften og den har en formel:

$$F_{M1} = F_{M2} = m \cdot g \tag{2.43}$$

Da vi ved at $F_{B2} = F_{M3}$, hvor massen er dobbelt så stor

$$F_{B2} = F_{M3} = 2 \cdot m \cdot g \tag{2.44}$$

Men den der $m \cdot g$ det ligner jo præcis formlen for kraften udovet af en normal mursten

$$F_{B2} = 2 \cdot (F_{M1}) = 2 \cdot (F_{M2}) = F_{M1} + F_{M2} \tag{2.45}$$

Så vi kan se at hvis vi har to ens kræfter, så kan vi faktisk bare ligge dem sammen for at få den resulterende kraft. Det her gælder helt generelt. Hvis der er to ting der skubber så kan vi bare ligge deres kræfter sammen for at få den resulterende kraft. (De behøver ikke være ens) Derfor skrives ligning (2.42) ofte på følgende måde (det store 'M' der ligger ned betyder summen, altså alle kræfterne lagt sammen):

$$\sum F = m \cdot a \tag{2.46}$$

En ting der er vigtigt er dog, som I måske næsten forventer nu, at kræfter har retninger. Hvis jeg skubber en bold en vej og du skubber ligeså hårdt den anden så kommer bolden ingen vegne da den resulterende kraft er lig med 0, så må accelerationen også være 0. Men hvis vi nu begge to skubbede lige meget imod hinanden så bolden ikke bevæger sig i den retning, men vi begge to skubber lidt opad, så bliver den resulterende kraft opad ikke 0 og derfor er accelerationen heller ikke 0, vi vil altså begynde at løfte bolden (hvis tyngdekraften altså ikke er større end den kraft vi udøver opad)

2.5 Bevægelse i én dimension

Når vi har noget der bevæger sig i én dimension, så skal vi til at benytte alle de redskaber vi har taget frem indtil nu.

Vi har vores afstandformel i ligning (2.41) og hvis vi kender den resulterende kraft, så kan vi udtrykke accelerationen ved at isolere i Newtons 2. lov:

$$a = \frac{F_{res}}{m} \tag{2.47}$$

Vi har bevægelse i én dimension når vi arbejder med ting der kører på skinner eller en hoppebold der bare hopper op og ned. Vi har én dimension så længe at tingen bare bevæger sig på en ret linje(den drejer ikke). Selv hvis vi har noget der bevæger sig skråt ud fra os, så kan vi bare dreje og tilpasse koordinatsystemet så det kun er i en dimension. Derfor når vi har en bold på en rampe så har vi også kun én dimension, i den situation vil vi ofte gerne ligge x-aksen på langs med rampen, hvis vi altid ligger vores x-akse så bevægelse kun sker frem og tilbage, så behøver vi altså ikke at udvide noget af det vi allerede har talt om.

2.6 Bevægelse i flere dimensioner

Flere dimensioner kan betyder flere problemer, men ikke for os, vi er fysikere, vi skal nok få gjort det så nemt som det kan blive og det kan blive meget nemt.

Vi har efterhånden lært at alting ved en bevægelse kan beskrives med vektorer. Hvis vi havde en sted, hastighed, acceleration eller sågar kraft vektor som så ud som $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, så kan vi også skrive den som to vektorer lagt sammen $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$, betyder det bare at når vi har noget der er påvirket af en kraft, har en hastighed eller er et sted, som kan beskrives ud af to retninger, at vi bare kan dele dem op og kigge på dem hver for sig? Ja det er præcis hvad det betyder! Så længe vi husker begge vektorer, og de to koordinatakser er vinkelrette på hinanden. De to retninger af bevægelsen påvirker ikke hinanden men de er begge to dele af bevægelsen. Vil vi gerne have hele bevægelsen til slut, skal vi bare sætte dem sammen.

Opgave 2.6.1: Jeg flyver med en jetpack Hvis jeg nu tog en jetpack på og den gav mig en konstant hastighed på $v = \begin{pmatrix} 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{pmatrix}$ og jeg flyver i 10 s hvor højt oppe og hvor langt fremme ender jeg så?

2.7 Skrå kast

Nu kan vi endelig forklare det som vi gerne ville nå frem til, nemlig det skrå kast. Det skrå kast er en klassik og brugbar situation, hvor vi har noget der bevæger sig i 2D, det bevæger sig både fremad såvel som op- og nedad. Det skrå kast er klassisk aldrig i mere end 2D, da vi kun har bevægelse i to retninger. Hvis du kaster en bold skråt op i luften, så kan du bare rotere så x- og y-akserne ligger præcis så vi kun har bevægelse i de to retninger, ved at lægge x-aksen langs jorden i den retning du kaster, og y aksen lodret opad.[5]

Når vi kaster noget opad så prøver tyngdekraften straks at trække det nedad. Af den grund så har vi en acceleration nedad. Men det er jo ikke fordi vi har en tyngdekraft (eller en anden kraft) der trækker bolden fremad efter vi har kastet den, næh den bevæger sig bare per newtons første lov (loven om interti), den fortsætter bare indtil noget stopper den.

Den bevægelse kan vi altså dele op i to, en del der går opad som bliver påvirket af tyngdekraften(konstant acceleration) og en del der går vandret som er upåvirket af tyngdekraften(konstant hastighed).

Hvis vi starter med at kigge på den vandrette, den er af gode grunde lidt lettere. I den vandrette retning har vi ingen acceleration, kun en hastighed, som så må være konstant.[6] Det betyder jo at vi bare har en bevægelse med konstant hastighed, der har vi jo allerede ligning (2.38). Ligeså skal vi til den lodrette bevægelse benytte en formel vi allerede har fundet, da vi i stedet har en konstant acceleration, ligning (2.41). Så er det dog stadig vigtigt at vi husker at bevægelsen er delt op, de har ikke samme hastighed i begge retninger, vi bruger her v_x, v_y til at kende forskel på de to forskellige hastigheder.

Så for at beskrive hvor langt noget er blevet kastet efter tiden t, så bruger vi de to formler:

$$x(t) = v_{x,0} \cdot t + x_0 \tag{2.48}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_{y,0} \cdot t + y_0 \tag{2.49}$$

(Man skal huske det rigtige fortegn for g, da tyngdekraften trækker nedad og vi formodentligt har kastet opad)

Her skal vi være forsigtige når vi fortolker resultaterne, som de to formler giver os, for de er kun gyldige så længe objektet er i luften. Før du kaster objektet, står det stille, og ovenstående beskriver ikke den situation. Ligeså når objektet rammer jorden, hvor det enten triller videre eller stopper. Hvordan fortolker vi så resultaterne rigtigt? Det er

[5] I virkeligheden kan en f.eks. en bolds bane godt krumme, for eksempel hvis vinden blæser fra siden. Det er ikke ret meget sværere at tage med i beregningerne. Hvis du vil vide mere, så spørg bare underviserne!

[6] Her antager vi at vinden ikke bremser objektet betydeligt, hvis vi tager luftmodstand med, bliver det faktisk så kompliceret at ens bedste bud er at løse opgaven med en simulation.

enkelt, vi skal blot finde ud af til hvilke tidspunkter de gælder! Lad os begynde med det nemme; startidspunktet. Det vil vi altid sætte til $t = 0\,\mathrm{s}$, du kan tænke på det som, at vi starter et stopur, så snart objektet bliver kastet. Altså er tiden negativ inden objektet bliver kastet.[7] Den anden tid er noget mere kompliceret at finde. Den må være defineret som det tidspunkt hvor objektet igen rammer jorden. Måler vi højden af jorden som y=0, skal vi løse ligningen:

$$0 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_{y,0} \cdot t + y_0 \tag{2.50}$$

Dens slags har du måske prøvet før, det er blot en andengradsligning. Bruger vi løsningsformlen, som helt generelt kan findes i matematiks kapitel, i ligning (1.1), så får vi i vores tilfælde:

$$t_{slut} = \frac{-v_{y,0} \pm \sqrt{v_{y,0}^2 - 4 \cdot g \cdot y_0 \cdot \frac{1}{2}}}{2 \cdot \frac{1}{2} g} \tag{2.51}$$

Hvilket kan gøres lidt pænere:

$$t_{slut} = \frac{-v_{y,0} \pm \sqrt{v_{y,0}^2 - 2 \cdot g \cdot y_0}}{g} \tag{2.52}$$

Du har måske bemærket at der er to løsninger.[8] Hold en kort pause, og prøv at se om du kan regne ud hvad det skal betyde?

Har du tænkt dig godt om? Godt! Her kommer svaret: Hvis vi antager at kastet starter i en højde y_0 over jorden, svarer den negative løsning til den del af kurven der er bag ved starpositionen. Det er med andre ord det tispunkt der ville svare til at bolden blev kastet bag ved dig, nede fra jorden, men på en sådan måde at den følger nøjagtig samme bue! Det er ikke rigtig nogen brugbar information, men sejt at forestille sig. Den løsning vi skal bruge må derfor være den anden, altså løsningen med minus. (Da g er negativ) Dette tidspunkt fortæller hvornår objekter rammer jorden.

$$t_{slut} = \frac{-v_{y,0} - \sqrt{v_{y,0}^2 - 2 \cdot g \cdot y_0}}{g} \tag{2.53}$$

Nu kan vi beskrive banen helt nøjagtigt, og vi ved alt om bevægelsen. En beskrivelse kunne lyde: "Objektets position er beskrevet af ligning (2.48) og ligning (2.49) i tidsintervallet fra t=0 op til tiden beskrevet i ligning (2.53)."

2.8 Opgaver

Ud for hver opgave er en antal prikker fra 0 til 4. Flere prikker betyder sværere opgave, vurderet af arrangørerne. Du vil måske opleve at det ikke altid stemmer med din egenoplevelse af hvad der er svært, da alle har svært ved forskellige ting.

Opgave 2.8.1: Lidt opvarmning
Her kommer et par korte opgaver, man kan regne for at øve sig lidt på det man skal bruge lidt senere.

1) Løs ligningen $2 \cdot x = \frac{3+y}{x}$ for x

2) Løs ligningen $2 \cdot x = \frac{3+y}{x}$ for y

[7] Det er måske en konvention du kender, hvis du følger med i raketopsendelser. Her er tiden også altid talt som negativ(T minus ten seconds!) inden raketten bliver sendt op, og positiv så snart den forlader startrampen.

[8] Ligesom til alle andre andengradsligninger

En bold bevæger sig 10 meter på 5 sekunder

3) Hvor stor en fart har bolden?

En bold starter fra hvile og accelererer med $2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ i 5 sekunder.

4) Hvor stor en fart har bolden efter de 5 sekunder er gået?

5) Hvis bolden startede med en hastighed på $3\,\text{m/s}$ i samme retning som accelerationen, hvad er sluthastigheden så?

6) Hvad hvis boldens starthastighed var i den modsatte retning som accelerationen?

7) Hvor stor er boldens endelige fart hvis accelerationen og starthastigheden er vinkelret på hinanden? (Hint, tænk på det som en vektor.)

• **Opgave 2.8.2: Stampe hopper en tur**

Stampe er en hurtig kanin, når han er kommet op i fart så kan han bevæge sig med ca. $11\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ i SI-enheder.

1) Hvor langt er Stampe noget efter at bevæge sig ved tophastighed i 2 minutter, svarende til $120\,\text{s}$?

2) Stampe tager dog lidt tid til at nå sin tophastighed, han skal faktisk bruge $2\,\text{s}$ på at komme fra hvil til sin tophastighed. Hvis vi går ud fra at Stampe har en masse på $2{,}5\,\text{kg}$, hvor stor en kraft må han så samlet udøve for at accelerer så hurtigt (hvis vi går ud fra at han udøver med en konstant kraft)?

•• **Opgave 2.8.3: Politijagt**

Din veninde er politibetjent og giver dig et lift, da I begge ser et bankrøveri hvor en røver racer væk i en hurtig sportsvogn, som hurtigt når sin tophastighed på $180\,\frac{\text{km}}{\text{t}}$, I sætter jagten i gang og kommer op på hastigheden $225\,\frac{\text{km}}{\text{t}}$, men røverne har nu et forspring på $250\,\text{m}$.

1) Hvor lang tid tager det før I indhenter røverne?

2) Hvis I ikke når jeres tophastighed når røverne har forspringet på $250\,\text{m}$, men I kun er nået til en hastighed på $90\,\frac{\text{km}}{\text{t}}$ men i accelerer konstant med en acceleration på $3{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, hvor lang tid tager det nu før I indhenter røverne?

••• **Opgave 2.8.4: Lerskålen der lærte at flyve (og falde)**

Der var engang en keramik skål, den så på himlen og dens fugle og den blev jaloux. Så skålen opfandt en lille kanon der skulle affyre den op mod himlen så den selv kunne flyve.

Kanonen har vinklen $50°$ ift. jorden. Og giver skålen en starthastighed på $30\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ i kanonens retning. Tyngdekraften på skåle er ligesom på alt andet $g = 9{,}82\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Kanonen selv er løftet $0{,}5\,\text{m}$ over jorden

1) hvor højt over og hvor langt væk fra *kanonen* er lerskålen efter $5\,\text{s}$?

2) Hvornår når skålen toppen af sin flyvebane og hvor højt er det?

3) Hvor lang tid forbliver lerskålen i luften før den rammer jorden?

4) Hvor høj er den lodrette hastighed i øjeblikket før lerskålen rammer jorden? *Ekstra: tror du skålen klarer faldet?*

5) Lerskålen vil gerne flyve mindst $25\,\text{m}$ over jorden, opnår skålen den højde? Hvis ja, i hvor lang tid er den over $25\,\text{m}$ over jorden?

•••• **Opgave 2.8.5: Den hurtigste vej til studiet!**

Albert bor på 7. etage, hvilket er ca. $21\,\text{m}$ over jorden. Albert studerer fysik på KU og bor kun $400\,\text{m}$ fugleflugt væk fra sit studie, men pga. en dårlig elevator og akavet rute derhen, så kommer Albert altid for sent. Men Albert studerer fysik, så han har en idé. Hvad nu hvis han i stedet for at løbe ned af trappen, og cykle af al kraft han har. Så kunne han i stedet bygge en lille kanon.

Albert ved at kanoner skyder længst hvis de har en $45°$ vinkel, men han ved endnu ikke hvor hurtigt kanonen skal affyre ham, han vil nemlig helst ikke ryge forbi sit studie, men han vil også gerne lande tæt på. Derfor sætter han kriteriet at han skal lande indenfor 10 m af studiet. Det betyder altså at han gerne vil lande (400 ± 10) m fra hvor han starter. Da Albert læser fysik så ved han at tyngdeaccelerationen sagtens bare[9] kan skrives som $g_{start} = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ for at gøre det nemmere.

1) Hvad skal Alberts maksimale og minimale starthastigheder være i det han forlader kanonen?

Før Albert benytter sin kanon første gang, så husker han at det godt kan gøre ondt at falde meget langt, så han inkluderer en faldskærm i sin skoletaske. Faldskærmen aktiverer han i det han når toppen af banen. Faldskærmen sænker tyngdeaccelerationen til det halve, $g_{slut} = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

2) Hvis vi nu medtager at fra toppen af banen, der har Albert den halve acceleration, hvilken starthastighed skal han så starte med?

3) Albert er nysgerrig for et generelt udtryk for hvor langt han når, hvis han skifter acceleration halvvejs igennem banen, kan du finde på et? (Hint: opskriv accelerationen efter toppunktet som en brøkdel af den originale tyngdeacceleration)

●● Opgave 2.8.6: Heliumballonen flyver

Rosa kan virkelig ikke lide balloner. Men hendes bedste ven gav hende en hel pakke fyldt med helium fyldte balloner, en af ballonerne accelerer opad med $1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Det første hun gør er at kaste ballonen ned mod jorden med en hastighed på $1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ i en vinkel mod jorden der er 45° (det er altså 45 grader nedad)

1) Hvor er ballonen efter 2 sekunder (vi tænker ikke på om den støder ind i småting, så som gulvet)

2) Hvis vi går ud fra at kastet sker ved en højde på 1 m, rammer ballonen så jorden?

3) Hvis ballonen kun lige skal ramme gulvet i et punkt, ved hvilken højde skal den så kastes? (Hint: hvad gælder for at en andengradsligning har netop 1 løsning?)

●● Opgave 2.8.7: Up, up and away

Du får ideen at teste hvor mange balloner der mindst skal til for at halvere den acceleration der virker på dig. Hver Ballon løfter med en kraft på 5 N og du vejer i denne situation 50 kg, og vi lader bare tyngdeaccelerationen være $10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

1) Hvor mange balloner skal der til for at du oplaéver den halve acceleration? (Husk ligning (2.42))

2) Hvad ville der ske hvis du have den dobbelte mængde balloner og: du får et sidelæns skub, eller du hopper, eller begge dele. Tegn x-t og y-t graferne for alle situationerne (du må gerne tegne flere grafer i samme koordinatsystem)

●● Opgave 2.8.8: Løb Lukas

Lukas Lhoebe er kendt for at løbe hurtigt ca. $5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Men hans ven, Hans Häandbeold udfordrede ham en dag til at løbe hurtigere end Hans kunne kaste. Hans kaster så hårdt at øjeblikket bolden forlader hans hånd, så har den en hastighed på $22\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, men så bliver den også påvirket af en høj (tilnærmet konstant) luftmodstand, som påvirker den med en acceleration på $-2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Lukas påvirker også en luftmodstand, men han skubber hele tiden sig selv fremad, så den resulterende kraft er 0 og han kan ses som at have en konstant hastighed, vi ser også bort fra om bolden rammer jorden, vi kigger kun på bevægelsen på langs x-aksen, Hans' kast ses altså som helt horisontalt

1) Hvad kommer først 100 m?

2) Hvilken afstand skal de to løbe/flyve for at de når præcis lige langt?

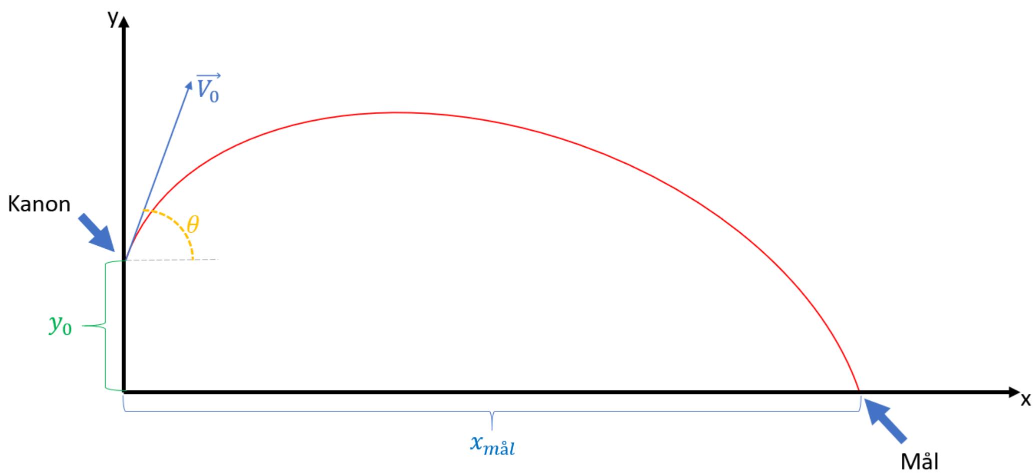
3) Hvis Hans' bold ikke må ramme jorden (han skal altså kaste opad), ved hvilken vinkel skal han kaste for at bolden rammer præcis hvor og hvornår Lukas er?

[9] En god approksimation til hurtige beregninger

2.9 Eksempel Eksperiment

Her kommer et afsnit, der måske kan være til hjælp når i skal skyde til måls. Hvis I hellere vil arbejde selvstændigt med at bruge alt teorien fra tidligere afsnit, behøver i ikke læse dette afsnit, men hvis i er lidt usikre på hvordan i skal gøre, eller bare vil tjekke jeres resultater, vil vi her gennemgå det hele.

Situationen er enkel: Vi har en kanon, vi er blevet beordret til at ramme et mål, og vi kender afstanden til målet. Kanonen har en højde y_0 over jorden, og målet har en højde på y=0. Vi kender ikke hastigheden hvormed kanonen affyrer kuglen, og det eneste vi skan stille på for at ramme målet er vinklen af kanonen. Situationen er skitseret i figur 2.9.



Figur 2.9: Tegning af eksperimentet.

Første skridt er at måle hastigheden hvormed kuglen skydes ud af kanonen. Dette kan gøres let ved at indstille kanonen til at skyde lodret op i luften, og så måle hvor lang tid der går før kuglen rammer jorden. Da vi skyder lodret op, må det passe at:

$$V_0 = v_{y,0} \tag{2.54}$$

og

$$v_{x,0} = 0 \tag{2.55}$$

Vi kan altså finde starhastigheden ved at isolere $v_{y,0}$ i ligning (2.49) hvor vi sætter $y(t_{slut}) = 0$:

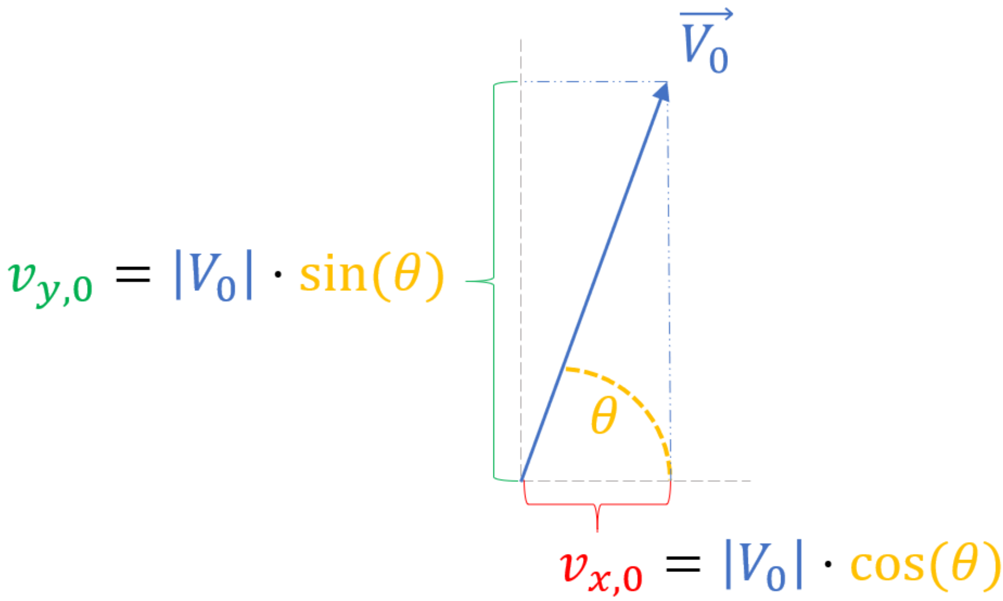
$$0 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{slut}^2 + v_0 \cdot t_{slut} + y_0 \tag{2.56}$$

Isoleret for starhastigheden:

$$v_0 = -\frac{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{slut}^2 + y_0}{t_{slut}} \tag{2.57}$$

Vi har nu fundet starthastigheden ved at indsætte g, t_{slut} og y_0. Vi ved nu alt hvad vi behøver for at ramme målet!

For at finde starthastigheden i x og y retningen skal vi blot bruge lidt trigonometri. Se figur 2.10.



Figur 2.10: Tegning til illustration af hvordan man finder de to starthastigheder.

Hvis vi nu ville finde ud af langt objektet kom i x-retningen, skal vi blot indsætte sluttidspunktet i ligning (2.48). Men nu er situationen jo den, at vi gerne vil vide hvilken vinkel vi skal stille kanonen i, for at projektilet kommer en bestemt afstand. Som beskrevet lige før, begynder vi med at eliminere tiden i ligningen for afstanden langs x (hvor $x_0 = 0$):

$$x_{slut} = v_{x,0} \cdot t_{slut} = -v_{x,0} \cdot \frac{v_{y,0} + \sqrt{v_{y,0}^2 - 2 \cdot g \cdot y_0}}{g} \tag{2.58}$$

Vi indsætter nu at $x_{\text{slut}} = x_{\text{mål}}$ (Skal de være, for at vi rammer målet) og de formler for starhastighederne vi fandt fra figur 2.10.

$$x_{\text{mål}} = -|v_0| \cdot cos(\theta) \cdot \frac{|v_0| \cdot sin(\theta) + \sqrt{(|v_0| \cdot sin(\theta)^2 - 2 \cdot g \cdot y_0}}{g} \tag{2.59}$$

Vi har nu en formel der fortæller os hvor kuglen rammer, som funktion af vinklen. Man kan i princippet godt isolere for vinklen, men det er langt sværere end det niveau vi ønsker at ramme i dette kompendium. I stedet vil vi foreslå at man finder den rigtige vinkel enten ved at prøve sig frem, eller ved at tegne en graf for $x_{\text{mål}}$ som funktion af vinklen, og så aflæse hvilken vinkel der passer. God fornøjelse med eksperimentet!

Kapitel 3

Kemi

3.1 Introduktion

Hvad er kemi for os?

Mette

Det, jeg finder interessant ved kemi, er, hvordan det kan forklare mange hverdags situationer. Man kan måske se, at der er sket noget som, at metal ruster og celler formerer sig. Bag begge fænomener er det kemiske reaktioner der finder sted. At finde ud af hvad der er sket, og hvordan den kan påvirkes er for mig det virkelig spændende. Stoffers kemiske egenskaber kan forklare hvorfor, stoffet reagerer, som de gør. For mig kan kemi give en forklaring af, hvordan ting hænger sammen og bruge kemi til at forbedre processer.

Knut

Kemi for mig er læren om verdens komponenter og hvordan, alt er bygget op. I kemi arbejder man på at kunne syntetisere nye stoffer og kunne detektere dem, dette gør man med et hav af analysemetoder. Kemi er derfor et naturvidenskabeligt fag, hvor al den viden, man har, kommer fra forsøg og eksperimenter. Det fantastiske ved kemi er, at det er med til gøre verden til et bedre sted og mange af de store problemers løsninger er baseret på viden fra kemi.

Ved hjælp af kemien kan man opskalere reaktioner og udvikle nye kemiske stoffer eller kunne producere stoffer, man tidligere fik fra naturen. Kemi hænger derfor meget sammen med industrien og har været en "katalysator" for industrialiseringen i de sidste 150 år. Blandingen af at finde ud af, hvordan verden er bygget op, og samtidig være en vigtig del af industrien er det, jeg synes, der gør kemi megafedt.

Marie

Jeg finder kemi spændende, da det kan beskrive og begrunde reaktioner, som vi kender fra vores hverdag. Man kan f.eks. forklare molekylers funktioner ud fra deres funktionelle grupper. Desuden bruges disse grupper til at bestemme fremgangsmetoden for mange synteser, som er en metode at fremstille diverse molekyler på.

Introduktionen til reaktions ligninger

En kemisk reaktion er, når molekyler reagerer med hinanden og danner nye molekyler. Et eksempel på en reaktion er forbrændingen af sukker, se reaktion {1}

$$C_6H_{12}O_6 + 6\,O_2 \longrightarrow 6\,CO_2 + 6\,H_2O \qquad \{1\}$$

Dette kaldes for et reaktionsskema. Det fortæller, at når der brændes et $C_6H_{12}O_6$ (sukker), så bliver der brugt 6 O_2 (oxygen) molekyler, og der er blevet dannet $6\,CO_2$ og 6 H_2O.

Afstemning

For at kunne regne på, hvad ændringen er af molekyler, er det vigtigt at reaktionsskemaet er afstemt. Dette betyder, er der er lige meget på begge sider, i forhold til masse, ladning og i forhold til mængden af de forskellige grundstoffer.

Intro til værktøjer fra matematik

Logaritmer

Logaritmen af et tal er det antal gange, man skal gange et andet tal med sig selv for at få et tredje tal. Man betegner dette udtryk $\log_a(x) = y$. Her er a det tal, der skal være ganges med sig selv y antal gange, for at give x. Dette kan skrives som:

$$a^y = x \tag{3.1}$$

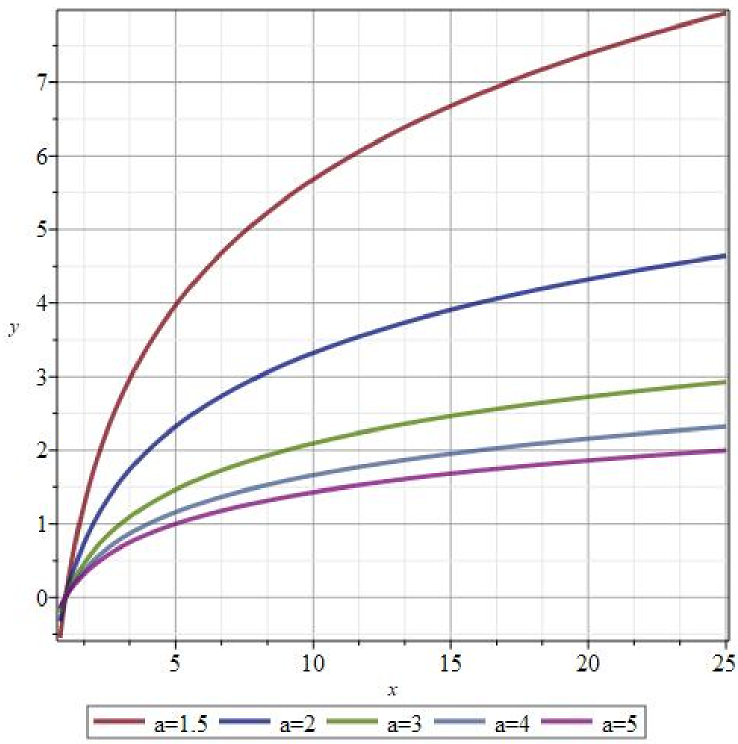
Hvis der indsættes 10 for a og $x = 1000$.

$$1000 = 10^y = 10^3 \Rightarrow y = 3 \tag{3.2}$$

a kan være et hvilket som helst positivt tal bortset fra 0 og 1 da 1^x er en konstant funktion, der giver 1, dette kan ses i ligninger (3.3)

$$9 = 3 \cdot 3 = 3^2 \quad \log_3(9) = 2 \quad \log_9(9) = 1 \tag{3.3}$$

Det meget anvendelige ved logaritmer er, at de er den inverse (omvendte funktion) af at opløfte et tal, det vil sige man kan bruge det til at reducere udtryk.
Den naturlige logaritme bliver beskrevet som $\ln = \log_e$. En vigtigt detajle er, at grundet $n^0 = 1$, se afsnit 1.2.2 (under matematikafsnittet), går alle logaritmefunktioner gennem $(1, 0)$, som kan ses på figur 3.1



Figur 3.1: Logarimtefunktioner i form af $y = \log_a(x)$ tegnet

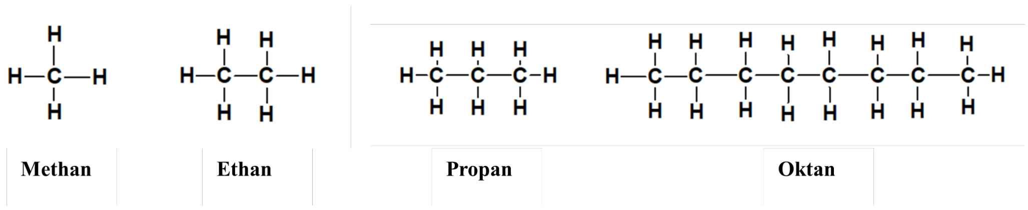
Hvis man har en ligning hvor man kender resultatet af, hvad logaritmen er, kan man løse en ligning ved at tage grundtallet (kaldet a) og opløfte i resultatet, dette kan ses i følgende eksempel.

$$\log_{10}(x) = 4 \Rightarrow 10^{\log_{10}(x)} = 10^4 \Rightarrow x = 10^4 \tag{3.4}$$

3.2 Organisk kemi

Carbonkæder

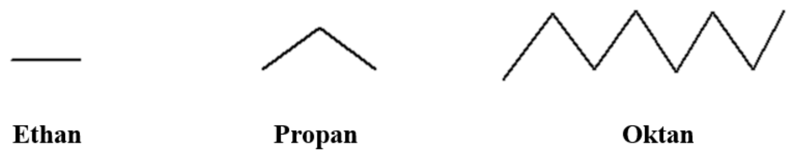
Carbonkæder består af grundstoffet carbon, også kendt som C i det periodiske system. Carbon er et af livets byggesten og er essentiel for verden omkring os. Carbonkæder består af en række carbonatomer sat sammen af bindinger, samt bindinger til en masse hydrogenatomer. Mængden af hydrogenatomer bestemmes ud fra carbonatomets resterende bindingsmuligheder, altså hvor mange elektroner de har tilbage.
Selve kæderne optræder i forskellige størrelser. Afhængig af længden gives et navn for kæden. Af korte carbonkæder kan både methan og ethan nævnes. Methan har en længde på kun ét carbonatom, og ethan på kun to carbonatomer. En mellemlang carbonkæde kunne derimod være propan, denne er dog en af de kortere, og har en længde på tre carbonatomer. Oktan er en af de længere caronkæder med sin længde på hele otte carbonatomer.



Figur 3.2: Carbonkæder med forskellige længder

Ovenfor ses de fire nævnte carbonkæder. En anden måde at opskrive disse på kunne være zigzag-struktur, hvor hvert knæk blot illustrer et carbonatom - dette skal I vide, når I arbejder med opgaverne.

En oversættelse af carbonkæderne fra figur 3.2 ville med zigzagstruktur se ud som vist i figur 3.3. Carbonkæden methan oversætter man dog ikke til zigzag, da den kun består af ét carbonatom, og derfor ikke kan skrives som en linje uden at symbolisere to carbonatomer.



Figur 3.3: Carbonkæder oversat til zigzag-struktur

Længden af carbonkæderne kan desuden have betydning for molekylets egenskaber. Udover påsætning af funktionelle grupper (dette uddybes i senere afnit), så kan længden også have stor betydning for polariteten af molekylet. Netop dette kigger vi nu nærmere på.

Polaritet i carbonkæder

Polaritet kan forklares som en ladningsforskydning. Det vil sige, at f.eks. den ene ende af et molekyle bliver mere negativt og den anden ende bliver en smule mere positivt. Herved er der sket en ladningsforskydning mellem de to ender. Et polært molekyle vil have denne ladningsforskydning. Forskydningen optræder på baggrund af de elektroner som bl.a. carbon, hydrogen og mulige funktionelle grupper bidrager med. Hvis der ikke optræder en ladningsforskydning, vil molekylet derimod være upolært. Vi kan altså dele vores carbonkæder op i polære og upolære kæder.

Polære og upolære molekyler vil ikke blandes med hinanden. I kender det måske fra når man blander olie og vand. Her optræder vand som det polære molekyle og olie optræder som det upolære. Her vil olien blot lægge sig som et lag ovenpå vandet. Samme princip gælder generelt for polære og upolære stoffer. Som hovedregel bliver polariteten påvirket, når funktionelle grupper sættes på. Desuden vil en carbonkæde i sig selv på fire eller flere carbonatomer som tommelfingerregel være upolær.

• **Opgave 3.2.1:** Carbonkæder får som sagt deres navn på baggrund af deres længde. I skemaet nedenfor ses en sammenhæng mellem længde og navn. Navngiv følgende molekyler ud fra antallet af carbonatomer. (Husk at et knæk blot illustrerer et carbonatom)

Antal Carbonatomer	1	2	3	4	5	6	7	8
Navn for carbonkæde	*Methan*	*Ethan*	*Proban*	*Butan*	*Pentan*	*Hexan*	*Heptan*	*Oktan*

Tabel 3.1: Navngivning af carbonkæder

1)

2)

•• **Opgave 3.2.2:** Polaritet afgøres som sagt af bl.a. carbonkædernes længde. Ud fra teorien i forrige afsnit skal i afgøre hvilke molekyler der er polære eller upolære.

1)

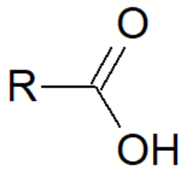
Funktionelle grupper

Hidtil har I lært om carbonkæder, som er bundet til det næste carbonatom i kæden og de resternde bindinger til hydrogen. Men hydrogenatomet kan skiftes ud med en såkaldt funktionel gruppe.
Når en carbonkæde har en funktionel gruppe vil det ændre molekylets egenskaber. Det kan f.eks. bevirke, at det bliver mere opløseligt i vand eller får syreegenskaber. Vi gennemgår to funktionelle grupper: carboxylsyre og alkohol, men der eksisterer mange flere.

Carboxylsyre

Som navnet antyder, er det en syre. Men til forskel fra uorganisk kemi, [1] hvor syren er H^+ er en carboxylsyre $-COOH$. Tre af carbonatomets fire bindinger bliver anvendt til at bindes til oxygenatomerne, hvilket gør at carbon har en binding til overs, som enten bindes til et nyt carbonatom eller et hydrogenatom. Oxygen har har seks elektroner i yderste skal og for at blive stabil, skal den have to bindinger. Dette kan opnås ved enten en dobbeltbinding, som er tilfældet for carboxylsyrens ene oxygen eller bindes til to atomer som det andet oxygen. Dermed vil en carboxylsyre se sådan ud:

[1] Den del af kemi der omfatter forbindelser uden carbon



Figur 3.4: Carboxylsyre

R er ikke et atom, men står for radikal. Et radikal er et atom eller en gruppe. I dette tilfælde vil det kunne være et andet carbonatom, hvis det er en carbonkæde længere end et atom eller en hydrogen, hvis der er en carbon.
Når en carbonhydrid har en carboxylsyre vil navngivningen være navnet for carbonhydridet med endelsen -syre. En carboxylsyre med et carbonatom kaldes for methan. Dermed vil molekylet hedde methan + syre, hvilket giver methansyre. Der kan sidde flere carboxylsyregrupper på én carbonkæde. F.eks. hvis ethan har to carboylsyrer, kaldes det en ethandisyre, her tilføjes *di* foran endelsen -syre.

Når en carboxylsyregruppe tilføjes til en carbonhydrid, bliver det mere opløseligt i vand. Dette skyldes dobbeltbindingen til oxygen samt bindingen til $-$OH. I en vandig opløsning kan hydrogenet, som er bundet til oxygen, løsrive sig fra oxygenet ved at regere med vandet. Her vil oxygen beholde hydrogenets elektron, hvilket gør oxygen negativ ladet og hydrogen positiv ladet. At et molekyle kan afgive et positivt ladet hydrogen er, hvad der kendetegner en syre, og dette lægger navn til gruppen, nemlig carboxyl**syre**gruppe. En uddybelse af, hvordan en syre fungerer, kommer under afsnittet 3.3.

• **Opgave 3.2.3:** Tegn følgende molekyler

1) Methansyre

2) Propansyre

••• **Opgave 3.2.4:** Navngiv nedenstående molekyler

1)

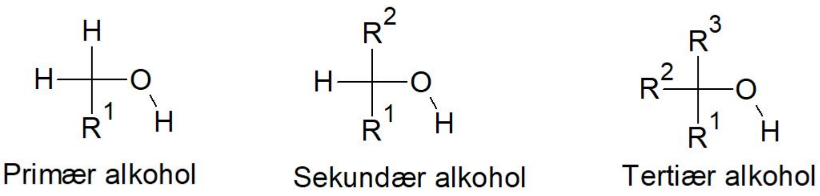
2)

3)

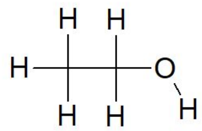
Alkohol

De fleste tænker sikkert på øl og spiritus, når de hører ordet alkohol. Men det er kun én af flere typer alkohol, nemlig ethanol. Der findes mange andre alkoholer f.eks. i bilers kølervæske og i glycerol (der ofte er i cremer), men de må ikke indtages.

En alkohols gruppe skrives typisk som $-$OH, hvilket vil sige, at oxygens to bindinger er bundet til hydrogen og et af carbonatomerne i carbonkæden. Det tidligere nævnte ethanol består af to carbonatomer, hvor der er bundet en alkohol til det ene, som kan ses på figur 3.5. Ligeledes vil en methan med en alkohol hedde methanol. Altså, når der er tale om en alkohol, får det endelsen -ol. Så det er først carbonkæden og dernæst endelsen. Hvis der er flere alkoholgrupper vil der komme en præfiks på -ol eks. -diol ved to alkoholgrupper i et molekyle og -triol ved tre.



Figur 3.7: Betegnelserne ”R^1”, ”R^2” og ”R^3” står for radikal og talene angiver at det ikke nødvendigvis er de samme grupper, der er bundet til carbonatomet.



Figur 3.5: Ethanol

Hvis et molekyle både indeholder en carboylsyre og alkohol vil det beholde endelsen syre. Endelsen -ol forsvinder, men for at vi stadig ved, at den er der, skrives det som et præfiks hydroxy-. Desuden hvis carbonkæden er længere end to carbonatomer, angives medtil hvilket carbonatom, den funktionelle gruppe sidder på. Et eksempel er 2-hydroxypropan-1-syre. Her er det en propan med en carboxylsyre på første carbonatom og en alkohol på andet carbonatom.

Der skelnes mellem primære, sekundære og tertiære alkoholer, som afhænger af alkoholgruppens placering. Når det er en primær alkohol, er der et radikal, altså carbonkæde, det vil sige, at alkoholen sidder for enden af kæden. De resterende to bindinger til carbonatomet vil være hydrogen, hvis der er en sekundær alkohol der, hvor der er to radikaler og en hydrogen bundet til carbonatomet med alkoholgruppen. Det kan f.eks. være midt i en carbonkæde. Den tertiære alkohol er så, at der er bundet tre radikaler til carbonatomet udover alkoholbruppen, og der er ingen hydrogenatover bundet direkte til carbon.

Alkoholer har et højere kogepunkt end de fleste rene carbonkæder. Samtidig har flere af dem et lavere smeltepunkt end vand, hvilket er hensigtsmæssigt i forhold til kølervæske. OH-gruppen er polær, det vil en gruppe være, som kan opløses i vand. Det gør, at de fleste alkoholer er vandopløselige, det afhænger dog af carbonkædens længde og antallet af alkoholgrupper.

••• **Opgave 3.2.5:** Tegn følgende molekyler

1) Octan-2-ol

2) Propan-1,2,3-triol

3) Hydroxymethansyre

•• **Opgave 3.2.6:** Navngiv nedenstående molekyler

1)

2)

3)

3.3 Syre og base

Fra grundskolen har man lært, at syre er det, der gør mad surt. Et eksempel er en citron, som smager surt og indeholder syren citronsyre. Og at når man blander en syre og base, får man vand og salt. I har nok også hørt om pH-skalaen, der primært går fra 0 til 14.

Som en kort opsummering er en opløsning sur, hvis pH er under 7 og basisk, når pH er over 7. Skillelinjen 7 er derfor neutral, da der hverken er en overvægt af syre eller base.

En syre er defineret (af Johannes Brøndsted) som at være et molekyle, der afgiver en hydron og en base er et molekyle, der optager en hydron. En hydron er et hydrogen atom, der har afgivet sin elektron, og det skrives som H^+. I praksis eksisterer H^+ ikke, men når en syre afgiver et H^+, reagerer det med vand og danner H_3O^+. En syre-basereaktion er f.eks. når saltsyre (HCl) reagerer med vand.

$$HCl + H_2O \longrightarrow Cl^- + H_3O^+ \qquad \{2\}$$

Her ses det, at saltsyre er en syre, fordi den afgiver et H^+, hvor at basen er H_2O på grund af, at den modtager et H^+. Vand kan også være en syre, dette sker for eksempel med NaOH, der reagerer med vand.

$$NaOH + H_2O \longrightarrow OH^- + H_2O + Na \qquad \{3\}$$

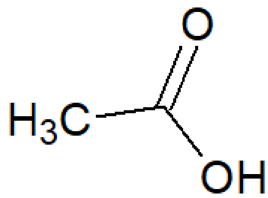
Her er vand syre, da den afgiver et H^+, hvor OH^- fra NaOH fungerer som base, da den optager en H^+. Måden, man vurderer surheden af en opløsning, er ved at bruge pH-skalaen. pH er defineret på følgende måde.

$$\mathrm{pH} = -\log_{10}([H_3O^+]) \qquad (3.5)$$

[H_3O^+] er symbol for koncentration af H_3O^+, det vil sige hvor mange H_3O^+ molekyler er der per liter vand. I afsnittet om koncentration 3.4 kan du læse mere om, hvordan man regner med koncentrationer. Vand har en pH på 7, det vil sige, at koncentration af H_3O^+ er $10^{-7}\ \frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{L}}$. Hvis pH er 1, koncentration af H_3O^+ $10^{-1}\ \frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{L}}$, det vil sige jo lavere pH, jo mere surt.

Korresponderende syrer og baser

En af de mest almindelige syrer, man møder i dagligdagen, er eddikesyre, og dets systematiske navn er ethansyre. Eddikesyre er det, man kalder for en svag syre. Dette skyldes, at når eddikesyre opløses i vand, er det kun en lille del af eddikesyremolekylerne, der vil reagere med vandet og afgive et H^+



Figur 3.8: Stregformel af ethansyre (eddikesyre)

Derimod er HCl (saltsyre) en stærk syre, da alle saltsyremolekyler i en opløsning vil afgive deres H^+.

Styrke af syre

En syres kemiske struktur har betydning for, hvor stærk syren er. Begrebet syrestyrke beskriver, hvor sandsynligt det er, at molekylet afgiver sit H^+. Hvis en syre er meget stærk, afgiver molekylet H^+ meget nemt, hvorimod det for en svag syre er mere usandsynligt.

Styrken af en syre bliver beskrevet ud fra dens pK_s-værdi, hvor en høj pK_s er svag syre, og en lav pK_s giver en stærk syre. I tabel 3.2 er der nogle almindelige syrer med deres syrestyrke og pK_s-værdier.

Syre	Syrestyrke	pK_s
HNO_3(salpetersyre)	Stærk	-1,4
H_2SO_4(svovlsyre)	Stærk	-2,8
HCl(saltsyre)	Stærk	-8
H_3PO_4(fosforsyre)	Middelstærk	2,15
C_6H_5COOH(benzoesyre)	Svag	4,2
CH_3COOH(eddikesyre)	Svag	4,76
$C_6H_8O_7$(citronsyre)	Middelstærk	3,13

Tabel 3.2: En række syrer, der er meget anvendte.

Regning med stærke syrer

Man kan beregne pH af en opløsning med en stærk syre ud fra den antagelse, at alle syremolekylerne afgiver alle deres H^+ og koncentration af H^+ vil derfor være lig med den formelle koncentration af syre. Den formelle koncentration er koncentration af stoffer, før det bliver tilsat.

$$\text{pH} = -\log_{10}([S]) \tag{3.6}$$

Ud fra ligning (3.6), hvor S er den formelle koncentration af syren, kan pH udregnes.

Regning med svage syrer

Når der skal beregnes pH af en svag syre, gælder der den modsatte antagelse i forhold til stærke syrer. For svage syrer er det kun nogle af syremolekylerne, der afgiver deres H^+. Det tager man højde for ved at bruge svagsyreformlen (ligning (3.7)), hvor at man ud fra at kende pK_s-værdien af syren og den formelle koncentration (S) kan finde pH:

$$\text{pH} = \frac{pK_s - \log_{10}(S)}{2} \tag{3.7}$$

3.4 Introduktion til mængdeberegning

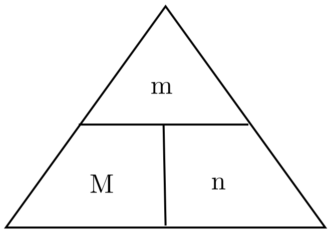
For at kunne regne på de reaktioner, man vil udføre, f.eks. hvor meget der skal tilføjes af et bestemt stof, er der brug for mængdeberegning. Mængdebregning er viden om, hvordan man ”tæller” det antal molekyler, man arbejder med. Hvis man regner i per molekyler arbejder vil man komme til at arbejde med meget store tal, fx i en liter vand er der 33456337560000000000000000 eller eller $3,45 \cdot 10^{25}$ molekyler. For at gøre det meget nemmere at regne med, har man defineret enheden mol.

Stofmængde og mol

Stofmængde er, hvor mange molekyler man har af et bestemt stof. Til at beskrive antallet af molekyler bruger man enheden mol. Hvis man har et mol stof, f.eks. et mol af O_2 (ilt), har man $6,022 \cdot 10^{23}$ atomer. Man angiver altid stofmængder i enheden mol i kemi, på grund af, at det gør det meget nemmere at regne med.

Masse

Masse er udtryk for, hvor meget materiale man har. I de fleste tilfælde og i hverdagen er massen og vægten det samme. Massen kommer fra de partikler, som atomet består af, det vil sige neutroner, protoner og elektroner. Hver af disse partikler har en bestemt masse. Masse måler man i kg, som står for kilogram. Her er gram enheden for massen, og kilo er et præfiks, der betyder 1000 gange. Det vil sige at der går 1000 gram på et kilogram. Det er samme princip inde for længde, som f.eks. med at på en kilometer går der 1000 meter.



Molarmasse

For at kunne udregne stofmængden af et bestemt stof har man brug for at kende molarmassen. Molarmassen fortæller, hvor mange gram stof der skal til, før man har et mol af det. Man finder molarmassen ved at bruge det periodiske system. Da det, der giver massen kommer fra de partikler, som atomet består af, kan man finde massen af et atom ved at lægge massen af alle protonerne, neutronerne og elektronerne sammen.

Eksempel

Carbon er nr. 6 i det periodiske system, det vil sige at det indholder 6 protoner og 6 elektroner. Afhængigt af isotopen har carbon 6, 7 eller 8 neutroner, langt de fleste carbonatomer har 6 neutroner. Det vil sige, at et carbonatom generelt har 6 protoner, 6 neutroner og 6 elektroner. En proton har en masse på $1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$. Massen af en mol protoner er på præsis 1 g. Dette kan man se ved at gange massen af et proton med Avogadros tal (antallet af molekyler i et mol stof), som kan ses i ligning (3.8)

$$M_{proton} = m_{proton} \cdot N_A = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1} = 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} \tag{3.8}$$

Protoer og neutroner masse næsten er ens og elektroner masse er meget lille i forhold til er masse af et mol carbon atomer 12g. Molarmassen af et bestem af atom er massen af 1 mol af atomet. Det vil sige at molarmassen af carbon er $12\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$. Molarmassen af alle grundstoffer står i det periodiske tabel. Man kan finde molarmassen af et molekyler ved at ligge molarmssen hvor hvert atom i molekyllet sammen.

Eksempel

Vand(H_2O) består af 2 Hydrogen atomer og et oxygen atom. Molarmassen af Hydrogen er $1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$ og molarmassen af oxygen er $16\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$.Der tages summen af 2 gange molarmmsen af hydrogen og en gang af molarmassen af oxygen, som ses i ligning (3.9)

$$M_{\mathrm{H}_{20}} = 2 \cdot M_H + 1 \cdot M_O = 2 \cdot 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} + 1 \cdot 16\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} = 18\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} \tag{3.9}$$

Sammenhæng mellem stofmængde, molarmasse og masse

I afsnittet før er der blevet introduceret tre grundværdier inde for mængdeberegning:

- Stofmængde: hvor mange molekyler der er, symbol n
- Masse: vægten af stoffet, symbol m
- molarmassen: massen af et mol af et vilkårligt stof, i de fleste tilfælde ligmed vægten, symbol M

Når to af disse værdier kendes, kan man finde den sidste. Sammenhængen mellem dem ses på den følgende skitse.

Ligning 3.10 viser sammenhængen mellem stofmængde, molarmasse og masse

$$n = \frac{m}{M} = \text{stofmængde} = \frac{\text{masse}}{\text{molarmasse}} \tag{3.10}$$

For at kunne finde én af de tre, skal man kende de to andre. Der vises et eksempel på, hvordan man finder molarmassen ud fra, at man kender massen og stofmængden.

Eksempel
Man vil undersøge en gas for, om det er methan (CH_4) eller ethan (C_2H_6), hvor man har kunne køle gassen ned og målt massen af den til at være 57 g, og ved hjælp af en trykmåling er det fundet, at der er 3,4 mol gas. Der findes først molarmassen af methan og ethan.
Methan består af ét carbonatom og 4 hydrogenatomer og har en molarmasse på

$$M_{\mathrm{CH_4}} = 12\,\mathrm{g/mol} + 4 \cdot 1\,\mathrm{g/mol} = 16\,\mathrm{g/mol}$$

og ethan består af 2 carbonatomer og 6 hydrogenatomer og en molarmasse på:

$$M_{\mathrm{C_2H_6}} = 12\,\mathrm{g/mol} \cdot 2 + 6 \cdot 1\,\mathrm{g/mol} = 30\,\mathrm{g/mol}$$

Nu findes molarmassen af den undersøgte gas, og derefter bliver den sammenlignet med molarmassen af ethan og methan. Der bruges ligning (3.10) til at isolere for molarmassen:

$$M = \frac{n}{n} \cdot M = \frac{m}{M} \cdot M \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n} \tag{3.11}$$

De kendte værdier indsættes i dette:

$$M_{gas} = \frac{m}{n} = \frac{57\,\mathrm{g}}{3{,}4\,\mathrm{mol}} = 16{,}7\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} \tag{3.12}$$

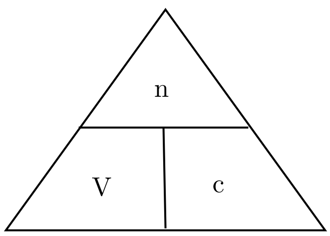
Det vil sige, at den ukendte gas består primært af methan, da 16,7 er tættere på 16 end 30.

Koncentrationer

Når stofmængder er begrænset til et rumfang, kan det betegnes som koncentration. Hvis man f.eks. har en beholder med 1 liter vand og 1 mol af et stof opløst i vandet, er der således en koncentration på 1 mol pr. liter, og den samme koncentration kan opnås hvis man har 2 mol i 2 liter vand. Der er således lige mange molekyler pr. plads. Koncentration kan regnes med følgende formel

$$c = \frac{n}{V} \tag{3.13}$$

Hvor n er stofmængden, V er rumfanget og c er koncentrationen som er målt i enheden molær (M), som betyder mol pr. liter. Sammenhængen mellem n, V og c kan ses på følgende skitse



Figur 3.9: Regnetrekant over koncentrationer

Fordelen ved koncentrationer er, at hvis koncentrationen er kendt, vil man kunne bestemme stofmængden ud fra et afmålt rumfang.

Regneeksempel

Hvis 2 gram NaCl opløses i 2 L vand, hvad vil koncentrationen af NaCl så være?
Først beregnes stofmængden. Molarmassen af NaCl er 58,5 $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$

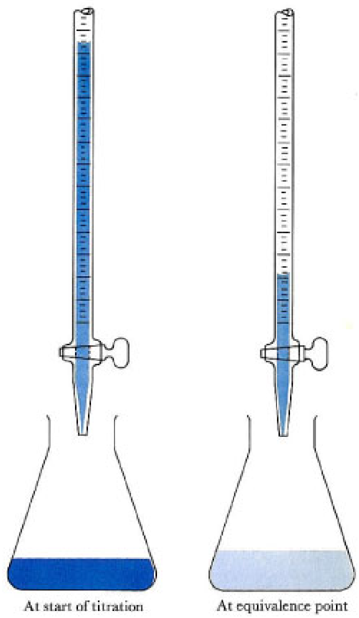
$$n = \frac{m}{M} = \frac{2\,\mathrm{g}}{58{,}5\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}} = 0{,}0342\,\mathrm{mol}$$

Koncentrationen beregnes ud fra formlen $c = \frac{n}{V}$

$$c = \frac{0{,}0342\,\mathrm{mol}}{2\,\mathrm{L}} = 0{,}0171\,\mathrm{M}$$

3.5 Titrering

Titrering er en analyse, der bruges til at bestemme mængden af et stof i en specifik opløsning. Det er en meget anvendt analyse, især i de tidlige dage af kemi. Til titreringen bruger man, at man kender reaktionen, der sker, når de to væsker blandes, og dermed kendes også forholdet imellem reaktanterne. På figur 3.10, ses der en opstilling af en titrering. Det aflange glasudstyr hedder en burette, i buretten er der det, man kalder for en titrator. På buretten kan man aflæse præsis, hvor mange ml titrator der er i. Titratoren bliver tilsat dråbevis til opløsningen i kolben. Titratorens koncentration er kendt, hvorimod at koncentration af prøven (opløsningen i kolben), er ukendt. Når titratoren tilsættes dråbevis, reagerer den med opløsningen, dette udføres indtil, man når ækvivalenspunktet. Ækvivalenspunktet indtræffer, når stofmængden af titrator er lig med stofmængden af det ukendte stof eller i det forhold, som de reagerer i i forhold til hinanden. Man følger som regel reaktionen ved at bruge en indikator. Indikatoren er en form for farvestof, som skifter farve i forhold til reaktionen. Når ækvivalenspunktet er nået, vil opløsningen skifte farve på grund af indikatoren.



Figur 3.10: Billede af en vilkårlig titrering kilde[21]

På figur 3.10 kan det ses, at væskehøjden i buretten er faldet, når ækvivalenspunktet er nået. Man aflæsser forskellen fra før titreringen og efter titreringen, og man har det volumen af titrator brugt, og dermed kan koncentrationen af prøven udregnes.

Eksempel

I en mine i Sverige er der blevet udvundet noget jernmalm. For jernmalmen skal der undsøges hvor stor en del af det, der er jern. Jernmalmet er blevet opløst, og der undersøges, hvor meget jern(II), der er til stede ved at lave en titrering. Titreringen af jern(II) med $KMnO_4$(figur 3.11) som titrator, har følgende reaktion (4):

$$5\,Fe^{2+} + MnO_4^- + 8\,H^+ \longrightarrow Mn^{2+} + 5\,Fe^{3+} + 4\,H_2O \qquad \{4\}$$

Figur 3.11: Billede af $KMnO_4$ salt kilde([22])

Her ses det, at når der er Fe^{2+} til stede, vil MnO_4^- reagere med Fe^{2+} og oxidere det til Fe^{3+} og reducere manganet til Mn^{2+}, men når der ikke er mere Fe^{2+} i opløsningen, vil MnO_4^- være i opløsningen, og opløsningen vil begynde at blive lilla, idet MnO_4^- er meget lilla, hvorimod Mn^{2+} er næsten farveløs. På den måde kan man se, at når opløsningen er blevet lilla, indeholder opløsningen ikke længere noget jern(II), man er derfor nået ækvivalenspunktet.

Beregning
Der regnes på, hvor meget jern(II) prøven indeholder, og hvad koncentrationen af jern(II) er. Prøven havde en volumen på 25 ml, og koncentrationen af MnO_4^- er på 0,4 M, og der blev brugt 20 ml af titratoren. Der udregnes først stofmængden af MnO_4^-, der er tilsat til prøven ved hjælp af ligning (3.13). Derefter findes forholdet imellem MnO_4^- og Fe^{2+}, og dette forhold ganges med stofmængden af MnO_4^- for at få stofmængden af Fe^{2+}. Til sidst udregnes koncentrationen af jern(II) i prøven ved brug af ligning (3.13). Der udregnes stofmængden af det brugte MnO_4^-.

$$n_{MnO_4^-} = C_{MnO_4^-} \cdot V_{MnO_4^-} = 0{,}4\,\mathrm{M} \cdot 20\,\mathrm{ml} = 0{,}008\,\mathrm{mol} \qquad (3.14)$$

Det ses i reaktionen (4), at der for hver MnO_4^- skal bruges 5 Fe^{2+}, stofmængden af Fe^{2+} er dermed 5 gange større end $n_{MnO_4^-}$.

$$n_{Fe^{2+}} = 5 \cdot n_{MnO_4^-} = 5 \cdot 0{,}008\,\mathrm{mol} = 0{,}04\,\mathrm{mol} \qquad (3.15)$$

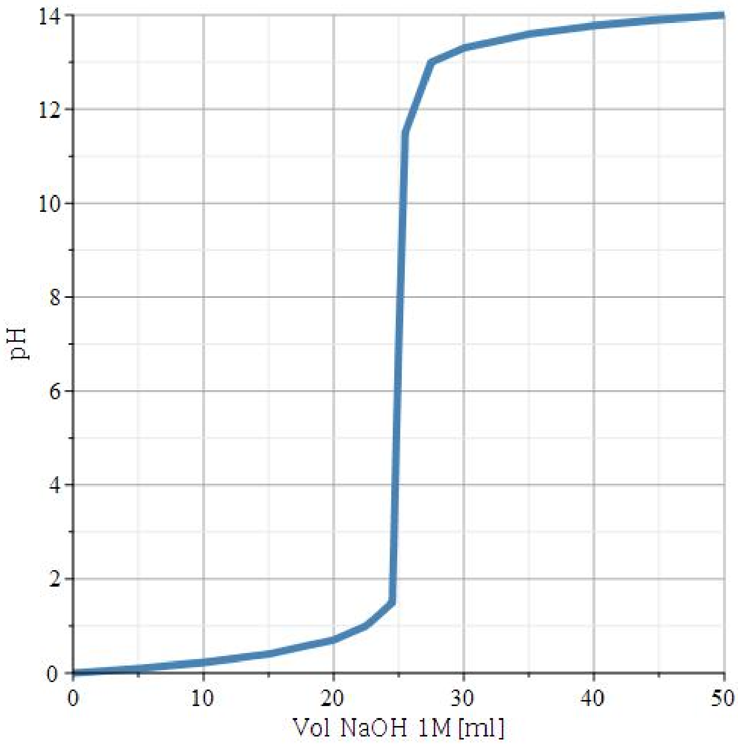
Der findes nu koncentrationen af Fe^{2+} i opløsningen.

$$c_{Fe_2^+} = \frac{n_{Fe_2^+}}{V_{Fe_2^+}} = \frac{0{,}04\,\mathrm{mol}}{25\,\mathrm{ml}} = 1{,}6\,\mathrm{mol/L} \qquad (3.16)$$

Syrebase-titrering

Når man skal anvende en syre eller en base, er det meget vigtigt at kende koncentrationen, da afhængigt af koncentration bliver opløsningen mere ”kraftig”. For at finde koncentrationen, udføres der en titrering. Et eksempel på dette kunne være en titrering af svovlsyre (H_2SO_4), med en 1 M NaOH. Resultatet fra dette kan ses på figur 3.12

Da det er en stærk syre titreret med en stærk base, vil ækvivalenspunktet være ved pH 7. På figur 3.12 kan det ses, at til at starte med ændrer pH sig meget meget lidt ind



Figur 3.12: Titrering af en opløsning med svovlsyre med

til, man er meget tæt på ækvivalenspunktet, hvor at pH stiger dramatisk, hvor at den derefter vil stige langsomt efter ind til, at den når pH=14. Det kan ses at ved at have en indikator, som skifter i området omkring ækvivalenspunktet. Da vil man tydeligt kunne måle, hvornår ækvivalenspunktet er, da der ville komme et meget hurtigt farveskift.

3.6 Spektrofotometri

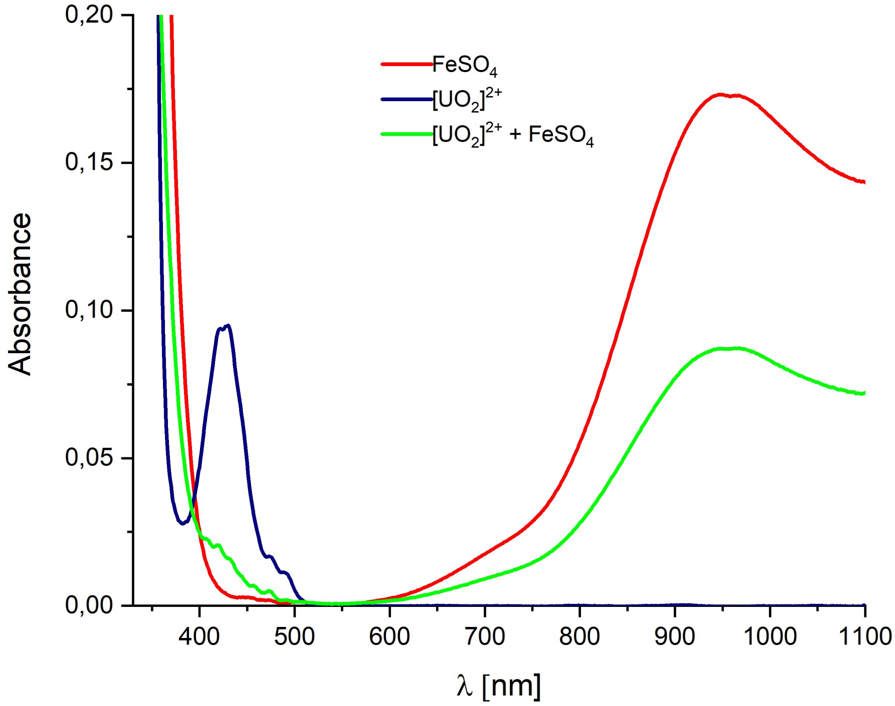
Spektrofotometri er en analysemetode, der er baseret på at bruge lys til at analysere, for hvor meget der er i en bestemt opløsning.

Analysen bliver foretaget i et spektrofotometer, hvor der bliver sendt lys gennem prøven med en bestemt intensitet, hvor der måles på intensiteten af lyset, efter det har passeret prøven. Intensiteten afhænger hvor meget lys, der passerer gennem arealet. Der bliver målt ved en bestemt frekvens af lys, hvor at efter alle resultaterne er optaget, bliver det vist i et "lys"spektrum.

Molekyler absorberer kun lys ved bestemte bølgelængder, og hvert molekyle giver et bestemt spektrum. I et spektrum er y-aksen absorbansen, som er defineret ifølge ligning (3.17), hvor I er intensiteten ud og I_0 er intensitet ind. Det vil sige, at når absorbansen er 1, betyder det at 90% af lyset bliver absorberet af prøven. Dette kan ses på figur 3.13, hvor at koncentration er halvt så høj på blandingen og absorbansen ved 1000 nm er også halvt så koncentreret.

$$A = \log_{10}(\frac{I}{I_0}) \tag{3.17}$$

På figur 3.13, er det spektre optaget i det synlige lys, det interval af lys vi kan ses med det blotte øje. En meget vigtigt egenskab er at jo højere koncentration desto højre bliver absorbansen, da der er flere molekyler, som absorberer lyset.



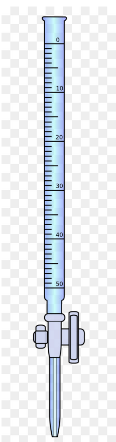
Figur 3.13: Absorbance som funktion af lyset bølgelængde, målinger er af vandige opløsninger med Jern(II)sulfat, uranyl og en blanding af uranyl og jern(II)sulfat

Det er molekylers eneskaber, der har betydning for, hvordan spektret bliver. I små absorbtioner kan man bruge en lineær sammenhæng imellem koncentration, absorbans, molekylets egenskaber og længden, lyset rejser. Dette er givet ved Lambert–Beer ligningen (3.18).

$$A = c \cdot \varepsilon \cdot l \tag{3.18}$$

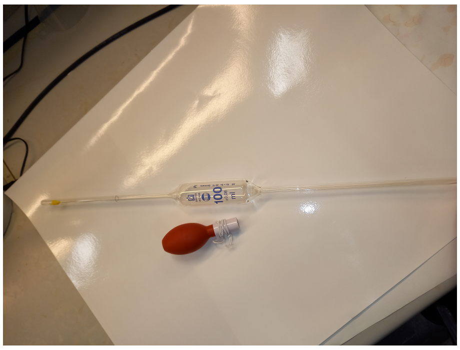
Hvor c er koncentrationen, ε er den molare absorption koefficient, l er længden som lyset bevæger sig gemen. Den molare absorptionkoefficient er en konstant der varirer fra stof til stof.

3.7 Standard glas udstyr i et kemilaboratoriet

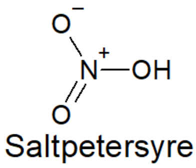


(a) En burette, der bruges i en titrering

(b) Et 150ml bægerglas, der bruges til at kunne overføre kemikalier sikkert på grund af dens hank



Figur 3.16: En 100 ml fuldpipette, der bruges til at kunne overføre væsker med høj præcision



Figur 3.17: Strukturformel for HNO_3

(a) En 200 ml målekolbe brugt til at kunne afmåle nøjagtigt 200 ml

(b) En 150 ml konisk kolbe, der bruges blandt andet til at have prøven i under titreringen

3.8 Forsøg-Titrering af salpetersyre

Indledning

Salpetersyre (HNO_3) er en stærksyre og meget oxiderene, strukturen kan ses på figur 3.17, salpetersyre korresponderende basse er nitrat(NO_3^-), det vil sige ved at finde mængde af salpetersyre, kan der findes indeholdet af nitrat.

Formål

Der udføres en titrering af salpetersyre for at kunne undersøge koncentrationen af salpetersyre og indholdet af nitrat.

Forsøgsvejledning

Til titreringen vil der blive brugt NaOH som titrand, hvor reaktionen 5 vil ske, når alt salpetersyre har reageret og er omdannet til nitrat, vil NaOH reagere direkte med væsken og den vil blive meget basisk. Titrering følges ved at bruge Bromthymolblåt som indikator.

$$HNO_3 + NaOH \longrightarrow NO_3^- + Na^+ + H_2O \qquad \{5\}$$

Sikkerhed

Til denne øvelse er det vigtigt at bruge sikkerhedsbriller, da stærke syrer og baser kan give øjenskader hvis man får det i øjnene. Det er også vigtigt at have kittel på under hele forsøget for at beskytte tøj, men også for at beskytte kroppen mod spild. Når man forlader laboratoriet, skal man vaske hænder, derudover hvis man får spild på hænderne, skal man også vaske hænder. Før øvelsen starter, bliver der gennemgået sikkerhedsregler dybere.

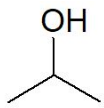
Materialer

I listen kan der ses alle de materialer der skal bruges til forsøget, i afsnit 3.7

- Kemikalier og opløsninger
  - Opløsning af HNO_3 med ukendt koncentration
  - Opløsning af 1 M NaOH
  - Bromthymolblåt indikator
- Glasudstyr
  - 25 ml burette
  - 100 ml bægerglas
  - to 50 ml bægerglas
  - to 50 ml koniske kolber
  - Glastragt
  - Fuldpipette
- Resterende udstyr
  - A-fodsstativ
  - Buretteholder
  - Arkimedesbold
  - Engangspipette

Metode

Sæt buretten fast til stativet ved at bruge buretteholderen, sørg for at buretten er placeret lodret. Overfør ved hjælp af en fuldpipette 10 ml af den ukendte opløsning (prøven) af HNO_3 til en 50 ml konisk kolbe. Overfør 50 ml af 1 M NaOH til et 50 ml bægerglas. Tag begge kemikalier tilbage til opstillingen af forsøget.**Kontrollér at buretten er lukket** og derefter fyld buretten op med 1 M af NaOH, derefter placér et 100 ml bægerglas under buretten, åbn for buretten og lad et par milliliter løbe igennem, luk derefter for buretten. Dette er for at at fjerne luftboblen i bunden af buretten. Placér den koniske kolbe med prøven under buretten, notér startvolumen af buretten, tilsæt få dråber af bromthymolbålt, som vil farve opløsningen gul. Start titreringen ved at åbne stille og roligt for buretten, forsæt indtil, at der opnås et permanent farveskifte til grøn, hvor ækvivalenspunktet da er nået. Når ækvivalenspunktet er nået, noteres den nuværende volumen af buretten.



Figur 3.19: Den sekundære alkohol propan-2-ol

Resultatbehandling

Notér først det tilsatte volumen af NaOH i tabellen og beregn derefter koncentrationen af NaOH.

	Titrering 1	Titrering 2	Titrering 3
V(NaOH)			
n(NaOH)			
n(HNO_3)			
c(HNO_3)			

Tabel 3.3: Tabel til notering af tilsat volumen og beregning af koncentration ved titrering

3.9 Forsøg-Primære, sekundære og tertiære alkoholer

Indledning

Afhængig af hvor alkoholgruppen sidder i et molekyle kan det regere og danne forskellige produkter. Dermed kan man ud fra en reaktion sige, om en alkohol er primær, sekundær eller tertiær.

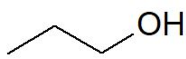
Formål

Forsøgets formål er at bestemme, hvad det er for en type (primær, sekundær eller tertiær) alkohol ud fra reaktionen med kaliumpermanganat.

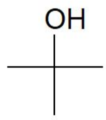
Forsøgsvejledning

Når kaliumpermanganat er i en vandig opløsning, deles den i en positivt ladet kaliumion (K^+) og en negativt ladet permanganat-ion (MnO_4^-). Her giver permanganat vandet en klar violet farve. Permanganat kan gøre, at en alkohol reagerer og danner et nyt molekyle. Her afhænger reaktionens forløb af, hvilken type alkohol, der er tilstede, altså om den er primær, sekundær eller tertiær. Hvis der er sket en reaktion, vil opløsningen skifte farve, da permanganat også omdannes.

I øvelsen vil der være den primære alkohol propan-1-ol, den sekundære alkohol propan-2-ol og den tertiære alkohol 2-metylpran-2-ol.



Figur 3.18: Den primære alkohol propan-1-ol



Figur 3.20: Den tertiære alkohol 2-methylpropan-2-ol

Lad os starte med et eksempel med en primær alkohol, nemlig propan-1-ol. Her sker der en reaktion over to trin. Carbonatomet med alkoholgruppen har bindinger til to hydrogenatomer. For hver reaktion vil en af de to hydrogenatomer indgå. Først dannes et mellemprodukt kaldet propanal, som er en funktionel gruppe kaldet aldehyd. Men da der stadig er en hydrogen, som kan reagere, vil dette mellemprodukt kun være der ganske kort. Herefter omdannes det til propansyre.

$$CH_3CH_2CH_2OH \longrightarrow CH_3CH_2CHO \longrightarrow CH_3CH_2COOH \qquad \{6\}$$

For en sekundæralkohold vil der kun ske én reaktion, da der kun er ét hydrogenatom bundet direkte til carbonatomet med alkoholgruppen.

$$CH_3CHOHCH_3 \longrightarrow CH_3COCH_3 \qquad \{7\}$$

For en tertiær alkohol vil der ikke ske nogen reaktion, da der er bundet et carbonatom til udover alkoholgruppen. Dermed vil 2-methylpropan-2-ol ikke blive omdannet til et andet stof.

$$CH_3CCH_3OHCH_3 \longrightarrow ? \qquad \{8\}$$

Sikkerhed

De tre alkoholers kemiske egenskaber minder meget om hinanden grundet deres ligheder i strukturen. Det gør, at de alle tre er brandbare og ikke sunde at indeånde dampe af. Derfor udføres forsøget med særlig fokus på, at kemikalierne er under udsugning. Her anvendes laboratoriets stinkskabe. Derudover undgå af få noget på hænderne og klø i øjnene bagefter. Det samme gælder for kaliumpermanganat.

Materialer

Under udførsel af forsøget er der behov for følgende materialer:

- Kemikalier
  - Propan-1-ol
  - Propan-2-ol
  - 22-methylpropan-2-ol
  - Kaliumpermanganat i natriumhydroxid
- Glasudstyr
  - 3 reagensglas med prop
  - 1 målekolbe på 10 mL
- Resterende udstyr
  - pH-indikatorpapir
  - Engangspipetter
  - Reagensglasstativ

Metode

Der udleveres 3 ukendte prøver der enten indeholder popan-1-ol, propan-2-ol eller 2-methylpropan-2-ol. Sæt de 3 reagensglas i reagensglasstativet og markér med en tusch, hvilken ukendt prøve I vil tilsætte i reagensglasset. Tilsæt med en pippette 1 mL af den ukendte prøve. Afmål derefter 10 mL af kaliumpermanganatopløsningen ved at tilsætte indtil stregen i målekolben. De 10 mL tilsættes til et af reagensglassene med en ukendt prøve i. Der afmåles derefter 10 mL til de to andre reagensglas. Derefter sættes der prop på reagensglasset og rystes. Vent i et par minutter for at reaktionen er færdig og notér så, om der er sket en farveændring. Herefter undersøges pH-værien med pH-indikatorpapir. Her dryppes en dråbe af de ukendte prøver på indikatorpapiret (anvend den rene prøve) og notér pH.

Resultatbehandling

Udfyld skemaet nedenfor med resultaterne fra forsøget og på baggrund af det bestem hvilken alkohol der var i hver af prøverne.

	Prøve A	Prøve B	Prøve C
Farve efter reaktion			
pH-værdi			
Alkohol			

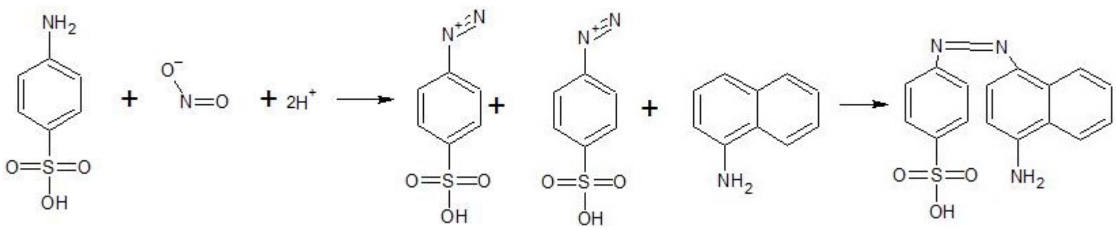
Tabel 3.4: Tabel til notering af dine resultater af farveskifte samt pH-værdi

3.10 Forsøg analyse af nitrit

Introduktion

Nitrit (NO_2^-) minder om nitrat i form af, at det består af et nitrogenatom og har samme ladning. Den store forskel er, at nitrit kun har to oxygen atomer, hvorimod nitrat har 3 oxygen atomer. En standardmetode til at kunne analysere for nitrit er ved at bruge et spektrofotometer.

Hvor man kan omdanne det til et meget farverigt stof, reaktioner til at omdanne det kan ses på figur 3.21. I den første reaktion reagerer nitrit med sulfanilsyre, og i den anden reaktion bliver det omdannet til det meget farverige stof ved, at produktet fra den første reaktion reagerer med naphthalen-1-amin.



Figur 3.21: De to reaktioner der bruges til analyse af nitrit

Materialer

I listen kan der ses alle de materialer, der skal bruges til forsøget, i afsnit

- Kemikalier og opløsninger
  - opløsning af HNO_3 med ukendt koncentration
  - opløsning af 1 M NaOH
  - Bromthymolblåtindikator

- Glasudsytr
  - 25 ml burette
  - 100 ml bægerglas
  - to 50 ml bægerglas
  - to 50 ml koniske kolber
  - glastragt
  - fuldpipette
- Resterende udstyr
  - A-fodsstativ
  - Buretteholder
  - Arkimedesbold
  - Engangspipette

Metode

I et 50 ml målekolbe tages og fyldes en smule demineraliseret vand, derefter tages der 10 ml af en opløsning med salpetersyre, som også indholder nitrit, med en 10 ml fuldpipitette. Derefter tilsættes der 2 ml af sulfanilisyre-opløsningen med et 10 ml måleglas. Målekolben rystes let og derefter tilsættes der 2 ml af naphthalen-1-amin-opløsningen. Opløsningen begynder at blive violet. Målekolpen fyldes op til strengen, derefter sættes prop på og kolben vendes 10 gange.

Målingen af prøven

Indholdet af målekolben hældes over i et 50 ml bægerglas. Der overføres ved hjælp af engangspipette nogle få ml til en kuvette. Kuvetten består af en ru og en glat side. Det er meget vigtigt at man kun rører på den ru side med fingerene, da den glatte side skal være så ren som muligt. Kuvetten placeres med den glatte side mod detektoren. Der placeres en kasse rundt om spektrofotometeret for at skærme for lys fra lokalet. Der efter bliver måling optaget og resultatet nedskrives i tabel 3.5

Der efter pipetteres der 25 ml fra 50 ml bægerglasset med den fortyndede prøve. over i en ny 50 ml målekolbe, derefter fyldes der med demineraliseret vand op til stregen. Derefter sættes der prop på og kolben vendes 5 gange.

Indholdet af målekolben hældes i et ny bægerglas, hvor at samme procedure foretages som for den fortyndede måling.

Resultatbehandling

For at kunne udregne koncentrationen af nitrit i den originale prøve skal der udregnes, hvor meget prøven er blevet fortyndet med undervejes i forsøget. Når der er fundet, hvor meget den er blevet fortyndet med, kan resultatet fra målingen ganges op med denne fortyndingsfaktor. Derefter bruges ligning (3.18), som er i afsnit 3.6 til finde koncentrationen.

	Ufortyndet opløsning	Fortyndet opløsning
Absorbans målt		
Koncentration (NO_2^-) i opløsningen		
Koncentration (NO_2^-) i prøven		

Tabel 3.5: Tabel til notering af resultat af nitritanalyse

3.11 Forsøg-Opløsning af NaCl i vand og olie

Indledning

Polære og upolære molekyler er kendt for ikke at ville blandes med hinanden. Dette skyldes den såkaldte ladningsforskydning. Ladningsforskydningen betyder, at den positive og negative del af en ladning har fordelt sig i hver sin ende. Saltet natriumchlorid (NaCl) består af ionerne Na^+ og Cl^-. For at opløse saltet skal opløsningsmidlet være polært. Dette skyldes, at der i polære molekyler optræder både negative og positive ender som konsekvens af ladningsforskydningen. Netop disse negative og positive ender gør polære molekyler til polære. Vi kan på baggrund af dette teste hvilke opløsninger, NaCl vil opløses i, da en opløsning til ioner vil kræve et polært opløsningsmiddel.

Formål

At identificere polaritet af opløsningsmiddel på baggrund af opløseligheden af natriumchlorid i hhv. polære- og upolære opløsninger

Forsøgsvejledning

Oxygenatomet i H_2O, også kendt som helt almindelig vand, trækker meget i elektroner, når det sidder i et molekyle med hydrogen. Hvor meget et atom trækker i elektronerne afhænger af elektronnegativitet, men det vil vi ikke kommere mere ind på i denne omgang.

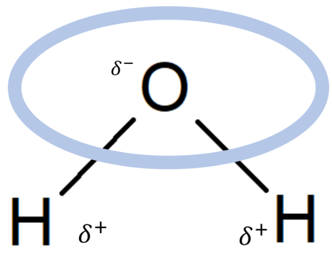
Når elektronerne samler sig om oxygenatomet, opstår den førnævnte ladningsforskydning. På denne måde får vand en positiv og negativ ende, hvilket gør det til et polært molekyle. Modsat gælder det for olie, som blot optræder som neutralt - der er altså ikke nogle atomer, som trækker i elektronerne mere end andre. Olie kan desuden kendes som upolær på sin lange carbonkæde. Dette kender vi fra afsnittet 3.2, hvor det blev forklaret, hvordan carbonkæders polaritet afhænger af deres længde og funktionelle grupper. Nedenfor kan forskydningen af ladninger ses på H_2O.

Sikkerhed

Både H_2O og olie er meget anvendte redskaber i hverdagen og vil ikke være sundshedsfarlige at arbejde med. Samme er gældende for natriumchlorid NaCl, som i hverdagen også går under navnet salt, som vi bl.a. bruger til madlavning. Af sikkerhedsmæssige årsager må man dog aldrig indtage noget i laboratoriet. Dette er meget vigtigt, da der kan optræde rester fra tidligere forsøg samt anden forurening.

Materialer

Under udførsel af forsøget er der behov for følgende materialer:



Figur 3.22: H_2O med illustreret ladningsforskydning

- Kemikalier
  - Natriumchlorid
  - Olie
  - Vand
- Glasudstyr
  - 3x 50 ml bægerglas
  - 2x spatler

Metode

De tre 50 mL bægerglas markeres med navnet af deres indhold. Det vil sige, at bægerglasset med vand markeres med navnet "Vand" osv. med de to andre. Herefter hældes natriumchloriden ned i hhv. bægerglasset med vand og olie. Omrør med spatel i begge bægerglas for at øge chancen for reaktion. Notér hvad der sker, når natriumchloriden tilsættes. Hvilke af opløsningsmidlerne er hhv. polære eller upolære?

Resultatbehandling

Som resultatsbehandling skal I svare på følgende spørgsmål;

- Hvordan kan man skelne mellem polære og upolære stoffer?
- Hvad består et salt af?
- Hvordan ser de forskellige bægerglas ud? Hvorfor tror I at reaktionen ser ud som den gør?
- Hvilket af olie og vand tror I er det bedste opløsningsmiddel for salte? Hvorfor?
- Hvorfor giver det mening, at olie ikke opløser salte lige så godt som vand?
- Ville alle upolære stoffer kunne bruges som opløsningsmiddel i dette forsøg?
- Hvorfor vil omrøring i bægerglas øge chancen for at reaktionen sker?

3.12 Ekstra Opgaver

Opgave 3.12.1: Kjeldahl
Nitrat er meget vigtigt for planters opbygning, det er derfor meget vigtigt at vide hvor meget nitrat, man har i ens gødning. Planter optager nitrat som nitrogenkilde. Nitrogen indgår bl.a. i plantecellernes DNA, RNA og aminosyre og er derfor nødvendig for, at planten kan lave celledeling og dermed gro. Klorofyl, som giver planter en grøn farve, indeholder nitrogen. Så hvis planten ikke har nok nitrogen bliver bladene gullige.

Til dette bruger man Kjeldahl analysen. Nitraten omdannes til ammoniak, som der titreres på. Dette sker ved at bruge en aluminiumslegering, hvor der sker denne reaktion:

$$3\,NO_3^- + 8\,Al + 5\,OH^- + 18\,H_2O \longrightarrow 8\,[Al(OH)_4]^- + 3\,NH_3$$

Titratoren er en NaOH-opløsning lavet ud fra at opløse 25 g NaOH salt i 100 ml demineraliseret vand.

1) Beregn koncentrationen af titratoren
Der bliver opløst 10 g gødning i 100 ml vand, der overføres til en 150 ml konisk kolbe. Der titreres derefter med NaOH og ækvivalenspunkt nås ved brug af 47 ml titrator.

2) Beregn stofmængden af brugt NaOH

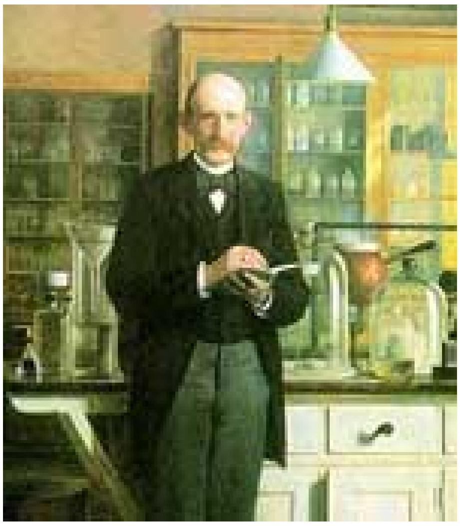
3) Beregn stofmængden af nitrat

4) Beregn koncentration af nitrat i den 50 ml opløsning af gødning

Aluminium bliver tilsat i form af devardas legering, legeringen består af 45% Al, 50% Cu og 5% Zn. Procenterne er i masseprocenter, det vil sige at i et 1g devardslegering er der 0,45g Al, 0,5g Cu og 0,05g Zn.

5) Beregn hvor mange gram devards der som minimum skal bruges til titreringen.

Kjeldahl analyse andvendes stadigvæk i høj grad i industrien, Kjeldahl udviklede metoden, mens han arbejdede på Carlsberglaboratoriet, et portræt af ham kan ses på figur 3.23.



Figur 3.23: Maleri af den danske Johan Kjeldahl af Otto Haslund

For at kende indholdet af nitrit udføres spektrofotometrisk analyse på en opløsning med 10 g gødning i 100 ml vand. Der anvendes samme teknik som brugt i forsøget i afsnit 3.10. Aborsorbansen er blevet målt til 0,34 og absorptions koefficient for den farve produkt er i denne opgave 27 $\frac{L}{mol}$.

6) Beregn koncentration af nitrit i opløsning.

Det er et krav fra landmanden at ud af den samlede mængde af NO_2^- og NO_3^- må max 5% af den være nitrit

7) Overholder gødningen kriteriet fra landmanden?

Opgave 3.12.2: Fritz Haber
Den tyske videnskabsmand Fritz Haber og kemiingeniøren Carl Bosch udviklede Haber–Bosch processen (ligning (9)) i starten af 1900-tallet, dette gjorde at man ikke længere var afhængig af ekskrementer fra dyr for at få ammoniak. I dag er Haber–Bosch processen meget brugt, da den er meget vigtigt for produktionen af gødning.

$$N_2 + 3\,H_2 \longrightarrow 2\,NH_3 \qquad \{9\}$$

Tyskerne brugte blandt ammoniak til at fremstille salpetersyre HNO_3, Der ønskes at fremstilles 2 mol ammoniak.

1) Kan det fremstilles ud fra 2,1 mol N_2 og 2 mol H_2 når det antages, at reaktion forløber 100% ?

2) Hvor mange mol N_2 og H_2 bruge for at fremstille 15 mol NH_3

Salpetersyre kan blive syntetiseret ud fra en proces kaldet Ostwald processen.

$$NH_3(g) + 2\,O_2(g) \longrightarrow H_2O(g) + HNO_3(aq)$$

3) Hvor mange mol HNO_3 bliver der dannet ud fra 15 mol NH_3, når der er et overskud af ilt og hvor mange mol O_2 bliver der brugt?

4) Hvor mange ml 17 M HNO_3 bliver der fremstillet ud fra 15 mol NH_3?

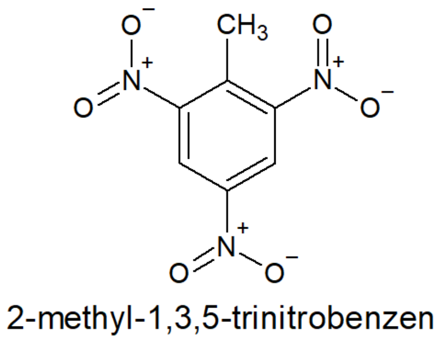
For at tjekke efter om produktet har en koncentration er 17 M, bruges der en pH analyse. Der bliver udtaget 10 ml af produktet, som bliver hældt over i en 100 ml målekolbe med 67 ml vand.
Derefter bliver der til føjet med vand op til kanten. Den fortyndet opløsning bliver målt til at have en pH på -0,23.

5) Hvad er koncentrationen af den fortyndet opløsning og er koncentration af produktet 17 M HNO_3?

En anden grund til at Haber-Bosh processen var meget vigtigt for tyskerene var at i starten af 1900-tallet foregik første verdenskrig, hvor man har brug for ammoniak for at kunne fremstille ammunition.

$$C_7H_8 + 3\,HNO_3 + 3\,H_2SO_4 \longrightarrow C_7H_5(NO_2)_3 + 3\,HSO_4^- + 3\,H_3O^+ \qquad \{10\}$$

6) Hvor mange kg TNT($C_7H_5(NO_2)_3$) kan der fremstilles ud fra 4,1 kg toluen (C_7H_8)), når der er et overskud af salpetersyre (HNO_3) og svovlsyre (H_2SO_4)



Figur 3.24: Sturktur af TNT

Opgave 3.12.3: Titrering
En opløsning af 50 ml eddikesyre tilsættes NaOH. Når der er tilsat 18 mL 2 M NaOH, er der lige meget syre og base i blandingen. Hvad er stofmængden af eddikesyre i den originale blanding?
Hint:
Eddikesyre og natriumhydroxid reagerer efter følgende reaktionsskema

$$CH_3COOH + NaOH \longrightarrow CH_3COONa + H_2O \qquad \{11\}$$

Der bliver foretaget en pH-måling af 10 ml eddikesyre fortyndet med 40 ml vand og pH-målingengiver et resultat på pH=2,8.

1) Stemmer det overens med hvad man ville forvente når pKs af eddikesyre er på 4,76?

Kapitel 4

Biologi

4.1 Introduktion

Biologien er studiet af alt levende. Det omfatter både dyrs adfærd og anatomi, planters opbygning, svampe, små bakterier, mekanismer i celler, og klimaet. På den her camp vil kompendiet handle om biodiversitet, fylogeni, DNA og blæksprutter.

I dette kompendium vil vi vise nogle af de mange dele af moderne biologi. Det er ikke et direkte billede af hvad, biologi på gymnasiet er, da faget biologi ofte er et sekundært fag og derfor bliver drejet i forhold til studieretning. Biologien i dette kompendium skal derfor ses som en repræsentation af biologi, når den står alene, men det er vigtigt at huske, at der, ligesom med andre fag, kan være både sjove og kedelige sider! Hvis der opstår tvivl omkring enten kompendiet eller biologi på gymnasiet, kan underviserne altid spørges.

4.2 Biodiversitet

Hvad er biodiversitet? Det er et ord, du måske har stødt på før, men helt præcist hvad betyder det? FN definerer biodiversitet som: "Mangfoldigheden af levende organismer i alle miljøer, både på land og i vand, samt de økologiske samspil, som organismerne indgår i. Biodiversitet omfatter såvel variationen indenfor og mellem arterne som mangfoldigheden af økosystemer." Dette er en lidt kompliceret definition, men kort sagt handler biodiversitet om de mange forskellige organismer, der lever på jorden.

Biodiversitet handler også om, hvordan disse organismer eksisterer sammen som helhed. Forestil dig, at nogen gerne vil undersøge en skovs biodiversitet. En forsker vil for eksempel dele skoven op i firkanter og tælle, hvilke mus der var til stede i de forskellige firkanter. Ud fra dette kan man undersøge, hvor høj artsrigdom af mus der er i skoven, og hvordan fordelingen mellem dem er. Ud fra det kan man udtale sig om biodiversiteten af mus i skoven og sammenligne den med biodiversiteten i andre skove.

Hvad er definitionen af en art?

For at kunne lave sådanne undersøgelser - både for forskere i biodiversitet, men også forskere i andre områder - er det vigtigt at kunne adskille arter. Inden for nogle organismegrupper er det nemt at kende forskel på arter. Du ville nok også kunne kende en orangutang fra en chimpanse. Derimod kan det være lidt sværere inden for andre grupper, som for eksempel planter. Du kan selv teste, hvad der er sværere i figuren nedenfor. Dog skal det også siges, at orangutangen er i en anden slægt end chimpansen i forhold til de to plantearter, der begge er i samme slægt. Måden at kende forskel på arter ved at kigge på dem er den morfologiske artsdefinition. Morfologi er den måde, en organisme ser ud på.

Figur 4.1: Øverst tv: Orangutang (*Pongo pygmaeus*), nederst tv: Chimpanse (*Pan troglodytes*), øverst th: Kærstar (*Carex acutiformis*), nederst th: Nikkende star (*Carex acuta*)

Det er dog ikke kun visuelt, man kan kende forskel på arter. En gammel definition på hvad, en art er, er at hvis to organismer kan lave afkom - børn - sammen, og det afkom også kan det, så må de to organismer være i samme art. Denne definition bliver problematisk i flere tilfælde. Det er svært at observere og kontrollere parring mellem organismer. Derudover er der flere organismer, der slet ikke kan reproducere seksuelt, men kun aseksuelt. For at gøre det endnu mere forvirrende er der også nogle arter, mest blandt planter, der kan danne hybrider, der har afkom der godt kan reproducere seksuelt. En hybrid er et afkom med en "far" og "mor" fra to forskellige arter. Denne definition kan kaldes en biologisk definition.

En tredje definition er den fylogenetiske definition. Her ser man på, hvor tæt beslægtet med hinanden forskellige organismer er baseret på deres DNA. Det bliver der fortalt dybere om i 'Fylogeni'-delen af kompendiet.

Hvordan kan man måle biodiversitet?

Som du nok har bemærket, kan biologi og biodiversitet godt blive lidt kompliceret i forhold til definitioner og begreber, og hvordan man måler biodiversitet er ikke anderledes. Hvordan tæller man biodiversiteten? Der er flere forskellige måder at tælle på. Man kan tælle antallet af individer, biomassen eller hvor meget areal arten dækker. I dette kompendium vil vi kun beskæftige os med individtællinger, da dette ofte bruges i virkelige undersøgelser.

Tællemetoder - sampling

Når man tæller individer, er der generelt tre fremgangsmåder. Man kan tælle antallet af individer i hele området, man undersøger. Dette er en god teknik, hvis de arter, man tæller, er nemme at få øje på og ikke er der i stort antal. Det kunne for eksempel være, hvis man gerne ville tælle kronhjorte eller elefanter. Udover det er det den metode, der giver det bedste helhedsindtryk - dog kræver det mange ressourcer at tælle for eksempel alle rovbiller eller birketræer i en hel skov.

En anden metode er at inddele skoven i lige store firkanter. Derefter tæller man antallet af individer i nogle af firkanterne, og så antager man at der må være det samme antal i de andre firkanter. Når man gør dette, er det rigtig vigtigt at vælge de firkanter, man gerne vil tælle, med omhu. Forestil dig, at du har en skov med en stor sø i midten, og du har inddelt hele skoven med søen i firkanter. Du vil gerne tælle antallet af gedder, men har ikke tid til at tælle alle firkanterne, så du vælger tre. Desværre har du ikke tænkt dig godt nok om, og du har valgt tre firkanter, der slet ikke har noget af søen i! Så bliver dit data ikke repræsentativt for hele området. Dette er en smule overdrevet, men pointen er, at det er vigtigt at vælge nogle firkanter, der er repræsentative for området. Man kan også vælge at tælle hver anden firkant eller at gøre det helt tilfældigt. Det er dog oftest ikke den bedste løsning at vælge tilfældigt.

Den tredje metode indebærer også en inddeling i firkanter. Her tæller man dog ikke antallet af individer i firkanterne, men kun om de er der eller ej. Det gør man for alle firkanterne. Metoden er rigtig brugbar, hvis man skal finde ud af, hvilke områder der har den største artsrigdom. Denne type data kaldes 'presence-absence' data, netop fordi man kun er interesseret i, om en art er til stede eller ej, og ikke hvor mange af dem der er.

Artsrigdom og 'evenness'

Når man har talt eller estimeret, hvor mange individer der er i et område, skal man bruge nogle forskellige formler til at regne ud, hvad biodiversiteten i området er. Alt efter hvad man gerne vil undersøge, er der forskellige metoder til at gøre det. For at få et helhedsindtryk af biodiversiteten, bruger man ofte flere forskellige metoder til at regne på biodiversiteten. De to metoder, vi vil kigge på, er artsrigdommen og dominans.

Artsrigdom er et udtryk for, hvor mange arter der er til stede. Dominans er et udtryk for, om fordelingen mellem de forskellige arter er lige, eller om nogle arter er dominerende. Normalt omregner man dominans til 'evenness', som udtrykker det modsatte af dominans. Altså vil en høj dominans-værdi, medføre en lav evenness-værdi. Kig på figuren nedenunder. I den øverste boks ses en artsrigdom på 3 og en høj evenness. I den nederste er der ligeså høj artsrigdom, men evenness er lavere. I dette tilfælde har den øverste boks derfor en højere samlet biodiversitet, selvom artsrigdommen er lige stor hos begge eksempler.

Figur 4.2: Her kan ses forskellen mellem høj artsrigdom og høj evenness (øverst), og høj artsrigdom og lav evenness (nederst)

Ved brug af både artsrigdommen og evenness kan man udregne et diversitetsindeks, der samler værdierne og gør, at man kan give et bud på biodiversiteten i det område, man undersøger.

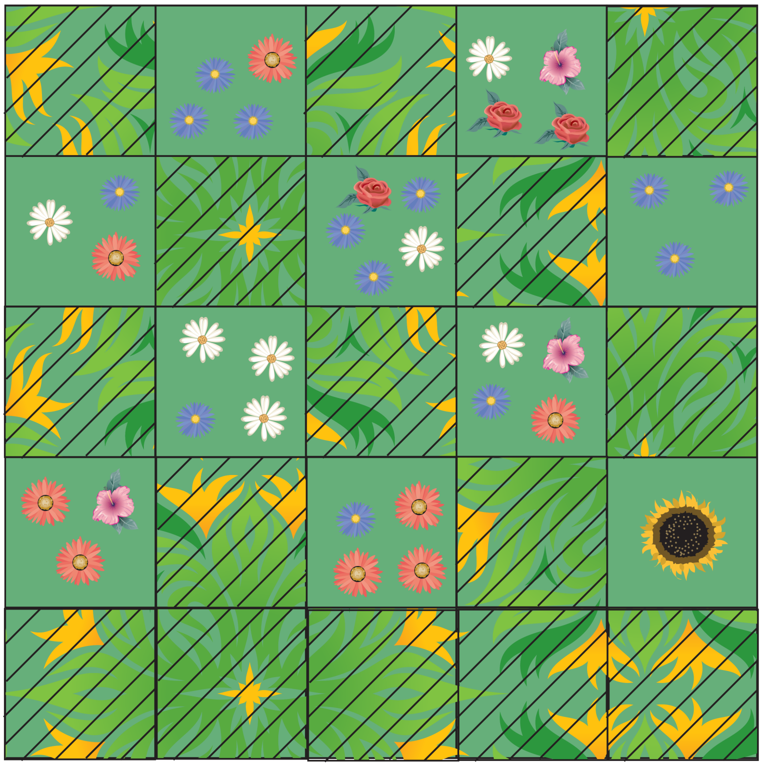
Øvelse

En gruppe forskere har været i Uglebjerg skov for at undersøge biodiversiteten af blomsterplanter. Hvis ikke biodiversiteten af skoven er høj nok, så vil den blive fældet. Der er tre krav, hvoraf skoven skal udfylde to for ikke at blive fældet. Kravene er:

- Der skal være mindst syv arter.
- Evenness skal være over 0.8.
- Shannon-Wiener indekset (beskrives længere nede i øvelsen) skal være over 1.2.

De har delt skoven op i 25 firkanter og har talt alle blomsterplanter i 10 af de 25 firkanter. Når de er kommet hjem, er det gået op for dem, at de slet ikke har talt antallet af individer, men at de har tegnet dem i stedet! Det var godt nok dumt, men så kan du heldigvis få lov at tælle og regne biodiversiteten ud for dem ved at bruge nogle af de mest udbredte metoder.

Her ser du en oversigt over skoven, hvor forskerne har samlet deres data. De 15 felter, der er skraverede, er de felter, forskerne ikke har talt. De 10 uskraverede felter indeholder antallet af individer, forskerne kunne finde i hvert felt.



Figur 4.3: En imaginær skov.

1. Åbn et excel-ark. Øvelsen kan også udføres på papir, men det tager lidt længere tid. I den første kolonne (A) skrives overskriften 'Art', og i den anden kolonne (B) skrives overskriften 'Antal'. Dernæst udfyldes rækkerne derunder ved at skrive et artsnavn, du selv finder på - for eksempel rød blomst, rose eller blomst 1 - og hvor mange individer af den art, der er der.

2. Læg det samlede antal af individer sammen ved at tage summen af alle tallene i 'Antal' kolonnen.

3. Tæl antallet af arter og skriv det ned. Artsantal har symbolet 'S'. Dette er artsrigdommen i skoven.

4. Nu skal vi udregne Simpsons dominansindeks (SD). Det udregnes ved brug af formlen, der står nedenunder, men du kan også bare følge beskrivelsen her: Først laver du en ny kolonne (C), hvor overskriften er ‘p’. Tag individantallet for hver række og divider det med det samlede antal individer, du udregnede i punkt 2. I den næste kolonne (D) skrives overskriften ‘p^2’. Her tages værdien i kolonne ‘p’ og sættes i anden. Sidst findes summen af kolonne ‘p^2’. Dette er Simpsons dominansindeks. Jo højere værdien er, jo mere skæv fordeling er der mellem de forskellige arter. Værdien kan være mellem

$$SD = \sum_{i=1}^{S} \left(\frac{n_i}{N}\right)^2 \tag{4.1}$$

5. Nu udregner vi Simpsons Evenness (SE). Formlen står herunder. SD er Simpsons dominansindeks, og S er det samlede artsantal. Hvis individerne er ligeligt fordelt på de forskellige arter, bliver evenness et. Jo lavere evenness er, jo mere ujævnt fordelt er individerne på de forskellige arter. Værdien kan være mellem 0-1.

$$SE = \frac{1 - SD}{1 - \frac{1}{S}} \tag{4.2}$$

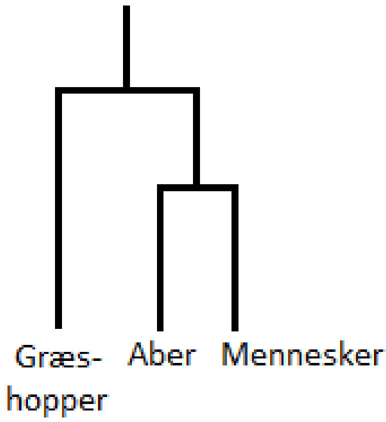
6. Til sidst skal vi udregne Shannon-Wiener indekset (H’). Dette indeks er både et udtryk for evenness og artsrigdommen og er derfor et mere direkte udtryk for den samlede biodiversitet. Formlen for at udregne det står nedenunder. I den femte kolonne (E) skrives overskriften ‘$ln(p)$’. Den naturlige logaritme tages af kolonne ‘p’ for hver art. I den sjette kolonne (F) skrives overskriften ‘$p * ln(p)$’. Her multipliceres værdierne fra kolonne ‘p’ og kolonne ‘ln(p)’ for hver art. For at finde Shannon-Wiener indekset tages summen af alle værdierne i kolonne ‘$p * ln(p)$’, og der ganges med -1 for at fjerne det negative fortegn. Jo højere Shannon-Wiener indekset er, jo højere er biodiversiteten. Værdien for dette indeks plejer at ligge omkring 1-2.

$$H' = -\sum_{i=1}^{S} (p_i * ln(p_i)) \tag{4.3}$$

7. Opfylder skoven mindst to ud af de tre nævnte krav i øvelsesbeskrivelsen? Bliver skoven fældet, eller har den høj nok biodiversitet til at blive beskyttet?

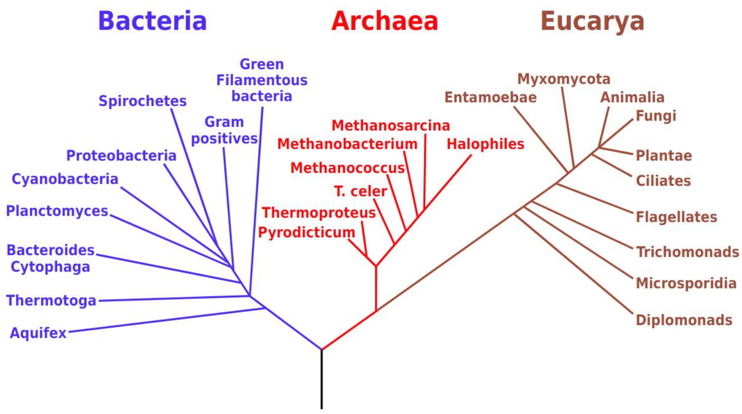
4.3 Fylogeni

Fylogeni er studiet af slægtskab. Det er dog ikke slægtskabet mellem individer, men slægtskabet mellem arter eller grupper af organismer. Derfor kan vi med fylogenien se på, hvordan forskellige arter er udviklet gennem tidens løb i forhold til hinanden. For eksempel kan vi undersøge slægtskabet mellem mennesker, aber og græshopper. Der vil man finde, at mennesker er nærmere beslægtet med aber, end vi er med græshopper. Når man taler om fylogeni, kan det dog være svært at visualisere, hvis bare man beskriver slægtskabet, og derfor er fylogeni næsten altid afbildet i fylogenetiske træer. Det fylogenetiske træ for mennesker, aber og græshopper kan ses på figur 4.4.



Figur 4.4: En fylogeni over slægtskabet mellem græshopper, aber og mennesker.

Den måde, man skal læse træet på, er, at mennesker og aber er nærmere beslægtet med hinanden end med græshopperne, fordi deres streger mødes tidligere. Man kan forestille sig, at jo højere op af figuren man går, jo længere tilbage i tiden går man. Dér, hvor stregerne fra aber og mennesker mødes, kaldes den sidste fælles stamform for aber og mennesker. Livets træ er et populært navn for et fylogenetisk træ, der beskriver alle kendte organismer. En version af livets træ kan ses på figur 4.4. Det viser meget overordnede kategorier i stedet for mindre grupper eller arter.



Figur 4.5: Livets fylogenetiske træ

Generelt deler man alle former for liv i de tre riger: bakterier, arkæer, og eukaryoter. Derunder har vi også mange flere under-inddelinger. For eksempel har eukaryoterne de tre mest kendte: Animalia (dyr), Fungi (svamp), og Plantae (planter). For at forstå fylogeni lidt bedre, zoomer vi først ind på nogle af de fundamentale elementer i vores forståelse af biologi: DNA, proteiner og aminosyrer.

Information og det centrale dogme

Information kan være mange ting. Det kan være 0'er og 1'er på en computer, det kan være et billede på væggen, en tekst i skolen eller en samtale mellem to mennesker. Men når vi kigger på **information** med molekylærbiologiske briller, så kan vi også se en mulighed mere. Information kan bruges til at fortælle, hvordan liv er bygget op indefra, og hvordan det fungerer.

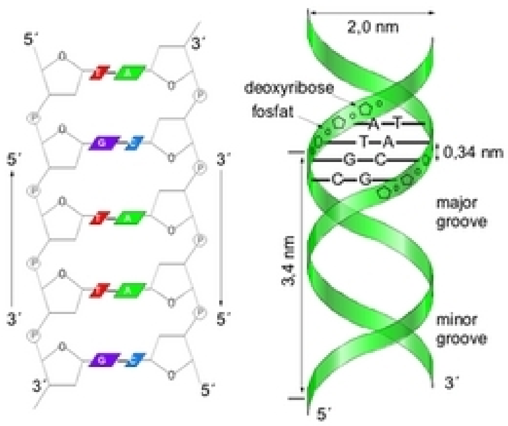
Du har måske hørt om gener, men hvad er det egentligt? Et gen er et stykke DNA, der koder for en bestemt funktion. Et godt eksempel er genet for brune øjne. Hvis man har genet, så har man brune øjne, hvis man ikke har det, så har man ikke brune øjne. På samme måde styres meget andet af både mennesker, men også alt andet levende. Hele den kode, der beskriver liv, er lagret i DNA.

Men hvordan kommer vi fra DNA til brune øjne? Det er her, **det centrale dogme** kommer ind i billedet. Det centrale dogme fortæller os, hvordan **information** bevæger sig igennem biologien.

Information er lagret i DNA, og vi kan bruge DNA til at lave flere kopier af DNA. Denne process kaldes for **replikation**. Når DNA skal bruges til noget, så bliver det først aflæst, og et stykke RNA bliver lavet. Denne process kaldes for **transkription**. Efter det kan vores RNA bruges til at lave proteiner. Denne process kaldes for **translation** og er enden på det centrale dogme. Noget af det rigtig interessante ved biologi er, at det kan ses fra mange forskellige vinkler. Vi har nu set på DNA, RNA og proteiner, hvor vi har fokuseret på den information, de indeholder. Vi går nu videre og kigger på, hvad DNA, RNA og proteiner egentligt består af, og hvor vi ellers møder dem.

Deoxyribose Nukleinsyrer (DNA)

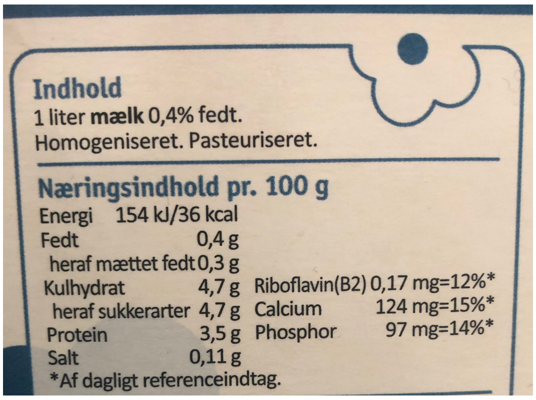
DNA kaldes ofte for et slags fingeraftryk, fordi DNA'et har små forskelle fra menneske til menneske. DNA ses ofte som en dobbeltstrenget og snoet struktur (se figur 4.6). DNA har en lillesøster - RNA, som hjælper DNA med at danne proteiner. RNA har kun én streng. DNA består af nukleotider, som består af en sukker (ikke som madlavningssukker, men der er stadig energi i det ;)), som hedder deoxyribose (heraf D'et i DNA), derudover er den en phosphatgruppe og en base. Basen varierer mellem Guanin, Adenin, Thymin og Cytosin samt Uracil - de kendes på deres forbogstav, så hhv. G, A, T, C og U. Hver base har en partner, således C og G samt A og T er makkere. Hvor blev U så af? Uracil er vikar for T, når det er en RNA-streng.



Figur 4.6: Oversigt af strukturen af DNA [23]

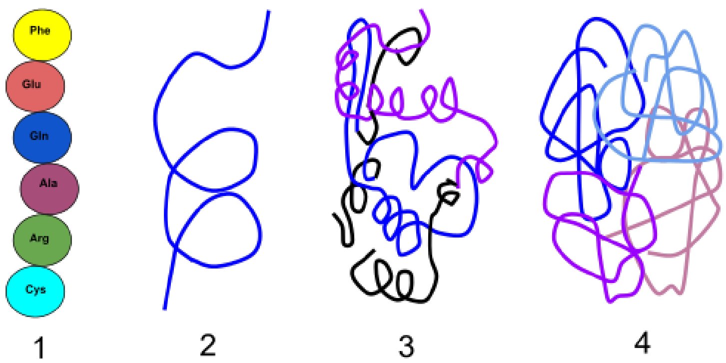
Aminosyrer og proteiner

Maden, som vi indtager flere gange om dagen, består af kulhydrater, fedt og proteiner - det som man kan læse bag på mælkekartonen. Det er næring, som kroppen kræver for at fungere, og deres byggesten består af kulstof, hydrogen, nitrogen, oxygen osv. I dette afsnit vil vi fokusere på proteiner, hvad de består af, hvordan de dannes, og hvad der sker, hvis cellen laver fejl.



Figur 4.7: Tegning af næringsindhold i mælk [24]

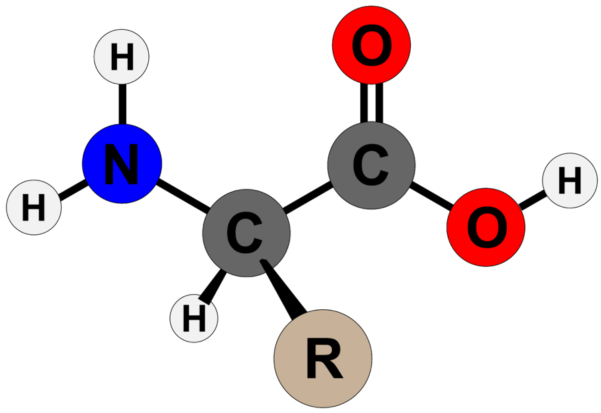
Proteiner er store molekyler, som består af lange kæder aminosyrer, der er foldet på helt specifikke måder. Der findes 20 aminosyrer, hvoraf 8 er essentielle og skal indtages gennem kosten. Aminosyrerne optages i kroppen gennem vores fordøjelsessystem, hvor de finder vejen ud til cellerne. I en celle kan hver aminosyre indgå som byggesten til nye proteiner. I kroppen sker der konstant en lang række af reaktioner, som kræver proteiner, herunder enzymer. Enzymer er proteiner, der fungerer som katalysatorer i meget specifikke reaktioner. En katalysator får en reaktion til at gå hurtigere.



Figur 4.8: Billede af protein med tydelig aminosyrekæde [25]

Aminosyrens kemiske egenskaber

Aminosyrer er små molekyler, der grundlæggende består af de funktionelle grupper (som giver molekylet særlige egenskaber) carboxylsyre og amino, som navnet aminosyre antyder. Disse kommer I til at lære meget mere om i kemi-undervisningen, men her kommer den vigtigste information: Carboxylsyrer, -COOH, kan sænke pH ved at afgive protoner i form af hydrogenatomer. Amino-gruppen, NH3, er basisk. Samlet er set er molekylet neutralt, men i realiteten har en del aminosyrer en sidekæde, som gør dem enten sure eller basiske.



Figur 4.9: Billede af aminosyre [26]

Dannelsen af proteiner

Proteiner opstår ikke tilfældigt - de dannes nemlig i en meget specifik proces. Proteiner dannes i kroppens byggesten, celler. Kroppen kan dog ikke danne et protein uden en opskrift, som skal følges meget nøje. Opskriften er det stykke RNA, som vi hørte om lidt tidligere. Vores RNA stykke bliver aflæst og oversat til en bestemt rækkefølge af aminosyrer, der så bliver til vores færdige protein.

Proteinsyntesen

Proteiner dannes ud fra DNA'ets baser. En DNA-streng åbnes og oversættes til en RNA-streng ved transskription (en slags Google translate). I kroppens celler sker dette i cellekernen. Efter oversættelsen føres RNA-strengen ud af kernen og hen til et ribosom, som er et organel, der kan oversætte RNA-sprog til aminosyrer. Ribosomet læser strengen og sender et signal til transport-RNA (også kaldet tRNA) om at finde de rette aminosyrer, som findes løst i cellen. Aminosyrerne kendes ud fra tre baser i en specifik rækkefølge. Aminosyrerne sætter sig i den rette rækkefølge og danner hermed en peptidkæde, som næsten svarer til et protein. Når hele RNA-strengen er læst, vil polypeptidkæden blive transporteret til golgi-apparatet, som er cellens låsesmed - den folder peptidkæden, så den bliver til den rette nøgle til dens funktion. Hermed er proteinet dannet og kan fungere dér, hvor den skal.

Mutationer og genetisk afstand

Når DNA skal danne proteiner, kan der ske fejl, men det sker sjældent, fordi DNA arbejder meget præcist. Imidlertid sker det dog, hvilket kan medføre sygdomme. Mutationerne sker ved, at DNA kommer til at bytte en base ud med en anden, glemmer at indsætte en base eller sætter en base for meget ind. Alle tre muligheder kan føre til, at DNA'et oversættes til de forkerte aminosyrer - og alle de efterfølgende aminosyrer kan lide samme skæbne.

Når vi gerne vil se på, hvordan forskellige dyr, planter og bakterier er placeret i et fylogenetisk træ, så bruger vi ikke kun deres morfologiske træk længere. I stedet bruger man "afstanden" mellem gener. Som tidligere nævnt, har alt levende en stor mængde DNA, og alt levende har fået deres DNA fra deres forfædre. Det giver derfor god mening at måle, hvor ens to forskellige organismers DNA er for at finde ud af, hvem de er i familie med.

Der er nogle forskellige gener, der bliver brugt oftere end andre til at bestemme, hvor beslægtet to organismer er. Det er de såkaldte **molekylære ure** (molecular clocks på engelsk), og de er særlige på grund af to ting: 1) Generne er essentielle, så alle har dem og 2) deres funktion er bevaret, så de muterer ikke tilfældigt.

Disse to ting tilsammen betyder, at vi kan se på forskellene mellem to gener og bestemme, hvor meget to organismer er beslægtede med hinanden. Men hvilke gener er så molekylære ure? I mennesker bruger man ofte DNA fra mitokondrier, og i bakterier bruger man tit noget, der hedder 16S rRNA gener, hvilket er en del af deres ribosomer.

Men når man har fundet den DNA-sekvens, som man gerne vil have undersøgt, hvordan bestemmer man så afstanden? Her bliver vi nødt til at lave lidt matematik.

Bestemmelse af beslægtethed med Neighbor Joining algoritmen

Neighbor Joining (NJ) algoritmen er et sæt instruktioner, der kan bruges til at bestemme afstanden mellem et antal sekvenser. Selve algoritmen bruger et antal tabeller (også kaldet matricer) til at bestemme afstanden mellem alle sekvenser, indtil vi kan tegne et færdigt træ. I det følgende afsnit gennemgår vi trinnene, og i en kommende øvelse vil vi bruge dem til at bestemme afstanden mellem fire DNA-sekvenser.

Trin 1: Konstruktion af en distance tabel D (matrice)
I dette trin laver vi en tabel med alle forskellene mellem sekvenserne. Eksempelvis er der tre forskelle mellem AAAA og TTTA. Det gør vi for alle kombinationer og skriver ind i vores tabel
Sekvens A: AAAA
Sekvens B: TTTA
Sekvens C: AAAT

	A	B	C
A		3	1
B			4
C			

Figur 4.10: D-tabel nummer 1

Trin 2: Konstruktion af en ny distance-tabel Q
I dette trin bestemmer vi hvor langt der er fra én sekvens til resten af sekvenserne. Det gør vi ved at bruge følgende to ligninger:

$$Q(i,j) = D(i,j) - u(i) - u(j) \tag{4.4}$$

og

$$u(i) = \frac{\sum_{k=1}^{r} D(i,k)}{r-2} \tag{4.5}$$

Ligningerne ser lidt overvældende ud, men betydningen er forholdsvist simpelt. Ligning 4.5 betyder, at vi skal tage summen af alle interaktioner i en hel række og så dividere dem med $r-2$, hvor r er antallet af rækker. I vores tilfælde ovenfor er $r=3$, hvilket betyder, at vi skal dividere med 1.

Vi kan nu prøve at bestemme u-værdien for A

$$u(A) = \frac{u(A,B)+u(A,C)}{r-2} = \frac{3+1}{1} = 4$$

Det samme kan vi gøre for B og C - så vi får $u(B)=7$ og $u(C)=5$.

Vi kan nu bruge ligning 4.4 til at bestemme værdierne i vores Q-tabel. For feltet (A,B) vil udregningen se sådan ud:

$$Q(A,B) = D(A,B) - u(A) - u(B)$$
$$Q(A,B) = 3 - 4 - 7 = -8$$

Det kan vi nu fylde ind i vores nye Q tabel

	A	B	C
A		-8	-8
B			-8
C			

Figur 4.11: Q-tabel nummer 1

Trin 3: Beregning af afstand til nyt forgreningspunkt

Vi er nu nået til der, hvor vi skal samle to sekvenser til ét punkt (neighbor joining). De sekvenser, der skal forbindes, er dem med de laveste Q-værdier. Hvis der er flere, så vælger man bare tilfældigt. Herefter kan vi bestemme afstanden fra det nye fælles forgreningspunkt, som vi kalder for X, ved at bruge denne formel:

$$v(i) = \frac{1}{2} \cdot D(i,j) + \frac{1}{2} \cdot (u(i) - u(j)) \tag{4.6}$$

Når vi har fundet denne værdi for både vores i og j, kan vi tegne det som en lille graf, hvor vi har afstanden fra vores sekvenser til X. I vores eksempel er det (A,B) og (A,C), der har de laveste Q-værdier. Vi vælger derfor (A,B) tilfældigt og arbejder videre derfra.

Afstanden fra A til X bestemmes således:

$$v(A) = \frac{1}{2} \cdot D(A,B) + \frac{1}{2} \cdot (u(A) - u(B))$$

Vi kan nu bestemme v(A) og v(B)

$$v(A) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (4-5) = 0{,}5$$

og

$$v(B) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (5 - 4) = 1{,}5$$

Trin 4: Beregning af afstand fra X til de andre sekvenser
Efter vi har fundet X, bliver vi nødt til at tilpasse den første tabel, som vi lavede, da vi nu har fjernet både A og B og lagt dem sammen som X. Til at gøre dette bruger vi denne formel:

$$D(X,k) = \frac{1}{2} \cdot (D(i,k) + D(j,k) - D(i,j)) \tag{4.7}$$

Hvor i og j er hhv. A og B, og k er alle de andre sekvenser.

I vores eksempel kommer tabellen til at se sådan ud:

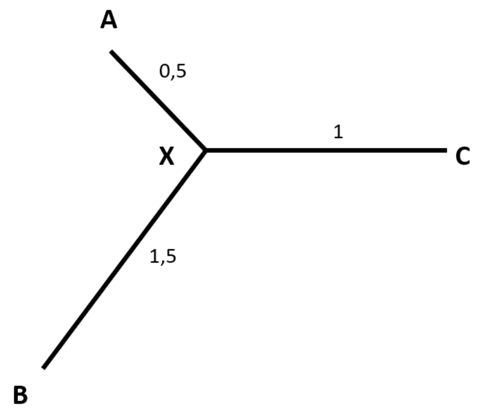
$$D(X,C) = \frac{1}{2} \cdot (D(A,C) + D(B,C) - D(A,B))$$
$$D(X,C) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 4 - 3) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

	X	C
X		1
C		

Figur 4.12: D-tabel nummer 2

Trin 5: Flere runder
I vores eksempel er vi nu færdige med at bestemme afstanden mellem vores tre sekvenser, men hvis vi havde haft flere, havde vi fortsat med at udregne ting, indtil alle afstande er bestemt.

Trin 6: Tegn det fylogenetiske træ
Vi er nu færdige med at bestemme afstandene mellem vores sekvenser, så vi kan nu tegne et færdigt træ. Vi ved, at der er 0,5 mellem A og X, der er 1,5 mellem B og X, og der er 1 mellem C og X. Vores træ ser derfor sådan her ud:



Figur 4.13: Tegning af et fylogenetisk træ for de tre sekvenser

Ud fra det her træ kan vi sige, at A er tættere beslægtet med C end B, fordi dets afstand er noget mindre. Vi kan også se, at C er meget lidt beslægtet med B, da deres afstand er meget stor.

Øvelse i fylogenetiske træer.

I skal nu til at lave et fylogenetisk træ i hånden. Vi kommer til at bruge de følgende fire sekvenser:
A: GCTAGCAT
B: GTAAGCAT
C: GCTGGCTA
D: GTTGGCAA

Vi kommer til at guide jer igennem de forskellige trin. I skal bare udfylde tabellerne nedenfor.

Trin 1: Lav distance tabellen D
Start med at lave distance tabellen D ud fra forskellene mellem de enkelte sekvenser.

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Figur 4.14: Tom D tabel til øvelsen

Trin 2: Lav distance tabellen Q
Her skal vi lave den nye distance tabel Q ved at bruge ligninger 4.4 og 4.5 fra tidligere. De er også her:

$$Q(i,j) = D(i,j) - u(i) - u(j)$$

og

$$u(i) = \frac{\sum_{k=1}^{r} D(i,k)}{r-2}$$

Det er en god ide at bestemme $u(A)$, $u(B)$, $u(C)$ og $u(D)$, før vi går i gang med at udfylde tabellen.

$$
\begin{aligned}
u(A) &= \frac{\sum_{k=1}^{r} D(A,k)}{r-2} = \frac{D(A,B)+D(A,C)+D(A,D)}{4-2} = \\
u(B) &= \frac{\sum_{k=1}^{r} D(B,k)}{r-2} = \frac{D(B,A)+D(B,C)+D(B,D)}{4-2} = \\
u(C) &= \frac{\sum_{k=1}^{r} D(C,k)}{r-2} = \frac{D(C,A)+D(C,B)+D(C,D)}{4-2} = \\
u(D) &= \frac{\sum_{k=1}^{r} D(D,k)}{r-2} = \frac{D(D,A)+D(D,B)+D(D,C)}{4-2} =
\end{aligned}
$$

Vi kan nu bestemme Q-værdierne.

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Figur 4.15: Tom Q-tabel til øvelsen

Trin 3: Bestem et forgreningspunkt
Vi tager nu det felt med den laveste Q-værdi og bruger den til at lave et forgreningspunkt.

Vi skal nu finde en fælles stamfader for disse, X. Dette gøres ved først at finde afstanden (v) til X. For eksempel ville $v(A)$ være afstanden fra X til A. Benyt ligning 4.6 til at bestemme afstanden, v, fra de to valgte sekvenser til deres stamfader X. Ligningen kan også findes her:

$$v(i) = \frac{1}{2} \cdot D(i,j) + \frac{1}{2} \cdot (u(i) - u(j))$$

Noter her værdierne for de nye afstande:

$$
\begin{aligned}
v_1(\quad) &= \\
v_2(\quad) &=
\end{aligned}
$$

Trin 4: Bestem afstanden fra forgreningspunktet til de andre sekvenser
Vi skal nu bestemme afstanden fra vores forgreningspunkt X til de andre sekvenser. Her kan vi bruge ligning 4.7.

Figur 4.16: Tom D-tabel til øvelsen

Trin 5: Gentag indtil færdig
Vi er nu nået dertil, hvor vi skal gentage processen. Vi starter med at bestemme den nye Q-tabel ud fra tallene i D-tabellen ovenfor.

Husk at bestemme $u(X)$, $u(C)$ og $u(D)$ først.

Figur 4.17: Tom Q-tabel til øvelsen

Igen vælges den laveste score til at være det nye forgreningspunkt, og de to tilhørende sekvensers distance til dette forgreningspunkt/taxon beregnes ligesom før. Værdierne for $u(A)$, $u(B)$, $u(C)$ og $u(D)$ kan genbruges fra ovenfor:

Nu mangler vi bare at sætte forgreningspunktet Y sammen med resten af træet - i ønsket om at kende alle distancer mellem sekvenserne i vores fuldendte fylogenetiske træ:

Figur 4.18: Tom D-tabel til øvelsen

Trin 6: Tegning
Nu kan vi tegne vores træ. Der er gjort plads nedenfor, til at du kan tegne dit fylogenetiske træ. Husk at skrive afstande på stregerne mellem sekvenserne.

Computerøvelse med fylogeni

Det første, vi skal gøre, er at hente et program, der hedder FigTree. Det kan hentes fra deres hjemmeside eller deres GitHub side. Følg linket her `https://github.com/rambaut/figtree/releases` og hent den fil, der hedder "FigTree.v1.4.4.zip". Læg filen i en god mappe og udpak filen. I kan nu køre et program, der hedder "FigTree v1.4.4.exe".

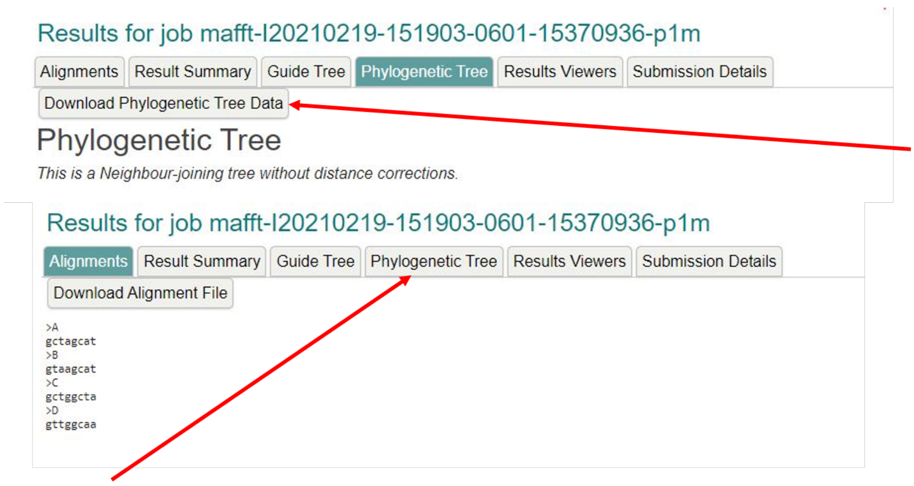
Øvelse 1: Gentag opgaven fra før ved brug af en computer

Vi har nu set, hvor besværligt det kan være at udregne alt i hånden. Vi vil derfor nu bruge computerværktøjer til at gøre det markant lettere.

For at kunne bruge en computer til at løse opgaven skal vi først bruge en fil, der indeholder vores sekvenser. I vil få filerne udleveret af underviserne.

Trin 1
Det første, vi skal gøre, er at bruge et værktøj, der hedder mafft til at lave en "alignment" for os. Det betyder, at den finder ud af, hvordan de forskellige sekvenser passer sammen. Vi kan gå ind på `https://www.ebi.ac.uk/Tools/msa/mafft/` og sætte vores sekvenser ind i søgefeltet.

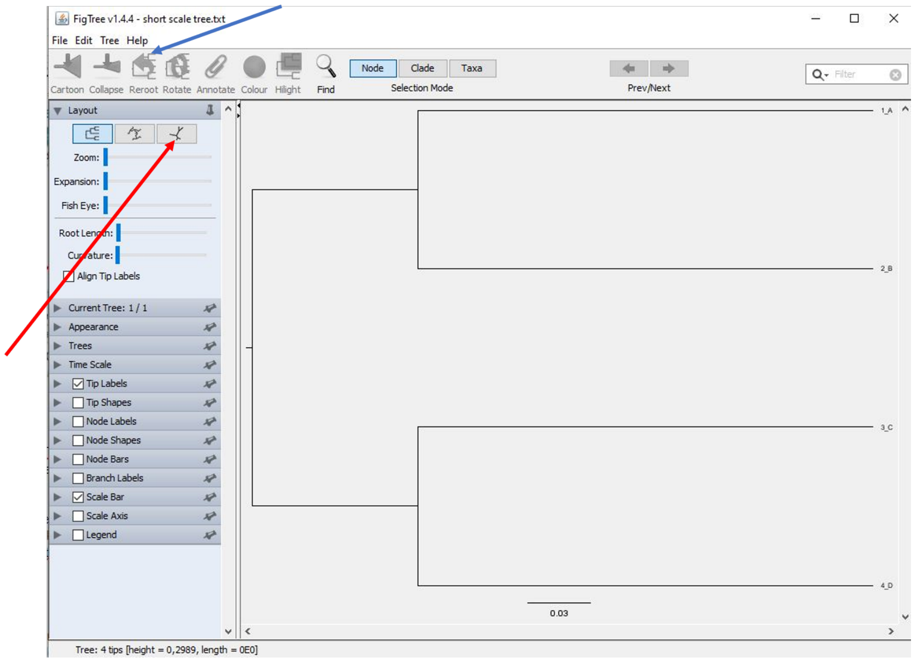
Når mafft har kørt, så klik på knappen Phylogenetic Tree og derefter Download Phylogenetic Tree Data, og gem så teksten som en .txt fil.



Figur 4.19: Guide til brug af mafft

Trin 2
Åben FigTree programmet, som vi tidligere hentede, og brug "File ->Open" til at åbne den fil, som vi lige har gemt.

Trin 3
Lige nu ser I nok et træ, der har en rod ligesom billedet nedenfor. Vi har dog ikke direkte valgt vores rod endnu, så roden i træet er helt tilfældig. Ved at klikke på "unrooted tree" knappen (se billede nedenfor) kan vi få et bedre overblik over vores træ.



Figur 4.20: Guide til brug af FigTree

Trin 4

Vi kan nu manuelt vælge, hvilken sekvens vi har lyst til at bruge som vores rod. Klik på den sekvens, der er længst fra de andre og klik derefter på “Reroot” knappen.

Trin 5

Kik på træet og se, om det ser OK ud. Hvis det ser OK ud, kan du gemme det ved at vælge “File ->Export Graphics”. Her kan du gemme billedet et godt sted og i et godt format (f.eks. som ”.png”).

Øvelse 2: Flere og længere sekvenser

I har nu prøvet. hvordan man kan analysere fire korte sekvenser både i hånden og med en computer. Når vi har så få korte sekvenser, er det næsten lige besværligt at gøre det på den ene eller den anden måde, men hvis vi får mange flere og længere sekvenser, så bliver det lige pludselig meget sværere.

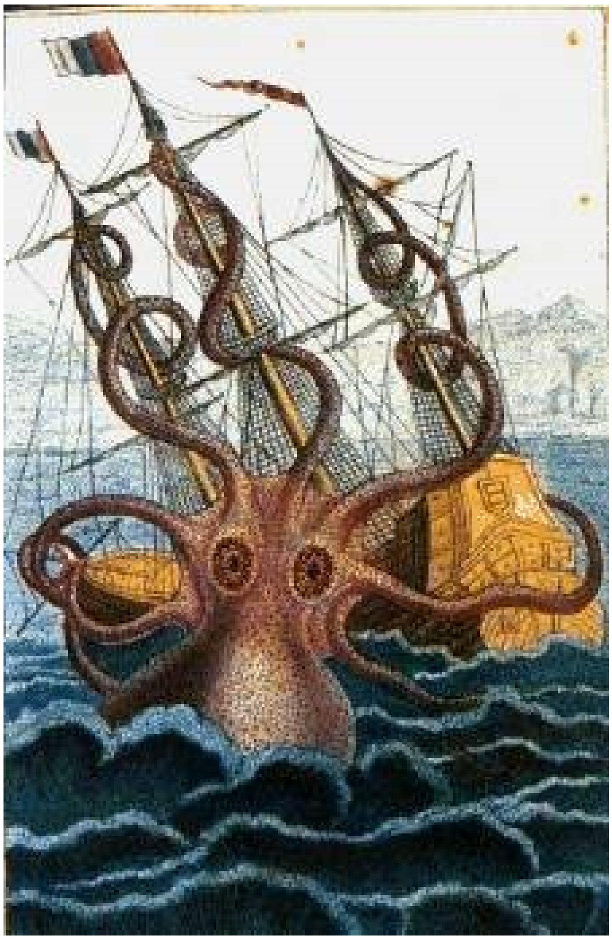
I denne her opgave får I udleveret seks sekvenser i en fil, og I skal selv lave et træ og fortælle, hvordan stamtræet skal se ud. I kan evt. sammenligne med NCBI taxonomy hjemmesiden og se, om I er enige. `https://www.ncbi.nlm.nih.gov/taxonomy`

4.4 Blæksprutter

Vi har beskæftiget os med livets diversitet, og hvilke metoder der kan bruges til at udforske sammenhængene derimellem. Nu vil vi dykke lidt ned i blæksprutter, som er en del af bløddyrene. De kaldes bløddyr, fordi dyrene i rækken ofte er bløde. Kroppen hos bløddyr er uleddet, men kan ofte deles i tre regioner: hoved, indvoldssæk og foden. Hovedet bærer munden og sanseorganer. Foden er muskuløs og bruges til bevægelse. Hos blæksprutterne er foden omdannet til en siphon der spytter vand. Indvoldssækken indeholder muskler, fordøjelseskanalen, hjertet, nyrer og kønsorganer.

Denne gruppe af dyr er meget gammel og er meget tidligt udviklet sig til meget forskellige klasser af dyr. Nogle af dem er snegle og muslinger, men dem, vi fokuserer på, er blæksprutter.

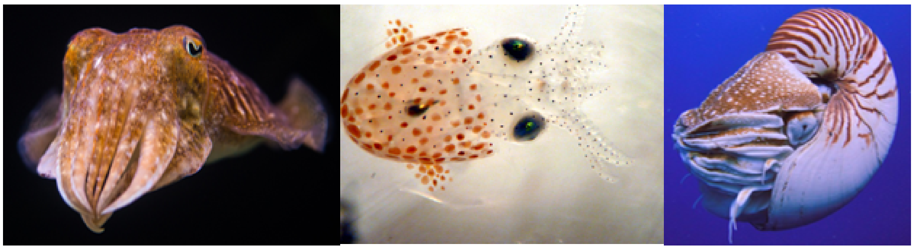
De mest populære historier omkring blæksprutter handler om gigantiske eksemplarer som for eksempel Kraken. Disse blæksprutter kom op af dybet og kastede sig over skibe og dræbte alle om bord.



Figur 4.21: Kraken den ottearmede blæksprutte

Men disse historier kan også have haft noget bund i virkeligheden. Blæksprutten på figur 4.21 er en ottearmet blæksprutte, men en af de største blæksprutter, der er blevet målt, er en tiarmet blæksprutte – kæmpeblæksprutten – der kan blive op til 18 m lang. Til sammenligning er Rundetårn 35 m, så der skal kun to kæmpeblæksprutter til at nå op på toppen af Rundetårn. Der findes også kolossalblæksprutten, som er endnu større, men der er ikke blevet fanget nok af dem til at kunne sige noget om deres generelle størrelse. Kæmpeblæksprutten befinder sig helt ned til 600 m dybde, mens kolossalblæksprutten højst sandsynligt jager endnu længere nede. En normal ubåd dykker kun 250 m ned.

De blæksprutter, man normalt beskæftiger sig med, er normalt ikke så store, men de er mindst ligeså spændende. På figur 4.22 herunder kan det ses, hvor mange forskellige typer af blæksprutter der findes ud over de tiarmede og ottearmede blæksprutter.



Figur 4.22: Fra venstre: cuttlefish (engelsk), cuttlefish (engelsk), nautilus

Blæksprutter er bløddyr og hedder på latin Cephalopoda. De er karakteriseret ved at have et antal fangarme omkring munden, som de bruger til at fange og håndtere deres bytte. Blæksprutter er kendt som utrolig intelligente dyr, og de har været på Jorden meget længe. Blæksprutter har cirka det samme antal neuroner – nerveceller – som en hund, og to tredjedele af dem er placeret i deres arme, mens en tredjedel er formet som en donut og ligger rundt om spiserøret.

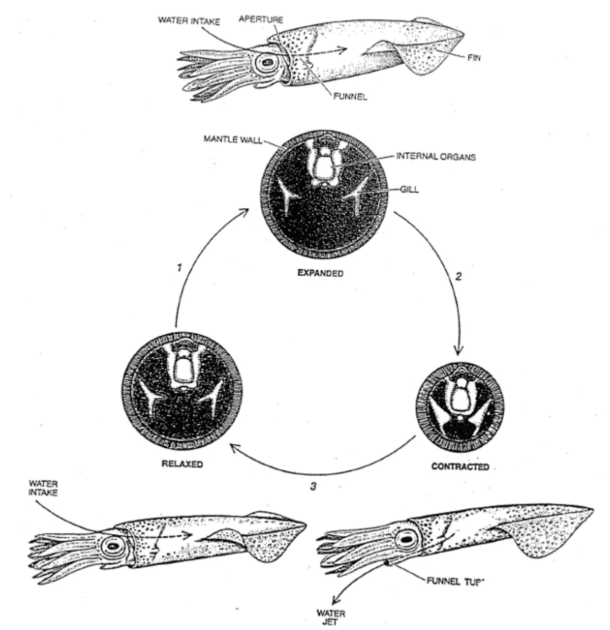
Et vidne om blæksprutters kløgtighed kan findes, hvis man læser historien om et akvarium, som ikke kunne forstå, hvorfor fiskene i deres ene akvarium forsvandt. Efter at have installeret et overvågningskamera fandt man ud af, at blæksprutten i akvariet ved siden af hver aften kravlede ud af sit eget akvarium og ned i fiskenes for at spise, hvorefter den kravlede tilbage til sit eget akvarium og lukkede låget efter sig, så de ansatte ikke skulle ane uråd.

De tiarmede blæksprutter og *Loligo*

De tiarmede blæksprutter har i alt 8 arme og 2 tentakler, der er placeret rundt om munden. På indersiden af armene og yderst på tentaklerne sidder der sugekopper på små stilke, som blæksprutten bruger til at holde byttet fast med. Sugekopperne er et lille bæger af muskler og har små tænder i kanten.

Overalt på blæksprutter kan man finde små rød-brune pletter. Det er kromatoforerne. De står for farveskiftet i blæksprutter og kontrolleres af nervesystemet. Når blæksprutten spænder sine muskler, bliver den mørkere, og når den slapper af, bliver den lysere. Der er også små, hvide, reflekterende iridocyter. De er på finnernes lyse underside. Kroppen er strømlinet i begge ender, så længe armene holdes samlede, og langsomme bevægelser kan laves ved at bevæge de trekantede finner.

De tiarmede blæksprutter kan dog også bevæge sig utrolig hurtigt. Det gør de ved at lade vand flyde ind i deres kappe, og derefter trække sig hurtigt sammen. Det gør, at vandet skydes ud af deres siphon som en jetstrøm, og de bliver skudt fremad i vandet. Mekanismen kan ses i figur 8 herunder. *Loligo* kan accelerere fra hvile til en fart på 2 m/s ved hjælp af en enkelt sammentrækning. De hurtigste tiarmede blæksprutter kan endda skyde sig selv op af vandet og "flyve".



Figur 4.23: Her kan ses en tegning over, hvordan de ti-armede blæksprutter bevæger sig.

Anatomi

Øjne:
Blæksprutternes øjne er meget lig vores egne og har også en linse, der dog ikke er formet som vores. Den er hård og sidder inden i øjet. Blæksprutter kan se forskel på lys og mørke og danner sig et komplet billede af, hvad de ser på ligesom os, men kan ikke se farver.

Radula:
Radulaen bliver på dansk også kaldt for raspetungen og er et træk, den har tilfælles med andre bløddyr. Den bruges til at findele føden og holde det fast, så det ikke falder ud af munden på blæksprutten.

Det reproduktive system:
Hunlige blæksprutter har ovarier og nidamentale kirtler, og hanlige blæksprutter har testikler. Ovarierne bærer æggene og er lidt gullige og slimede. De nidamentale kirtler gør æggene hårde, inden de skal ud i vandet gennem æggelederne, så der er større chance for, at de overlever. Testiklerne ligger i hannerne det samme sted som ovarierne i hunnerne, men er slankere, og væsken i dem er mere flydende og hvidlig.

Spiserøret:
Spiserøret går fra næbbet ned til maven og har til formål at føre maden og starte nedbrydelsen. På vejen går den igennem den donut-formede hjerne, hvilet også er grunden til, at blæksprutten ikke kan spise for store stykker af mad, da det ellers ville sætte sig fast i hjernen.

Maven:
I maven foregår størstedelen af madens nedbrydelse. Det er en oval struktur, der sidder mellem spiserøret og maveblindsækken.

Maveblindsækken, tarmen, og anus:
Maveblindsækken er foldet for at få så stort et overfladeareal som muligt til optagelse af den nedbrudte føde. Fra maveblindsækken løber resten af maden gennem tarmen og op til anus, som har sin udmunding oppe ved siphonen. Restprodukter bliver skyllet væk

gennem siphonens vandstrøm.

Blæksækken:
Blæksækken ligner en lille sort streg og indeholder blækspruttens blæk. Blækket sprøjtes ud af siphonen, når blæksprutten føler sig truet, og ved hjælp af kromatoforerne skifter blæksprutten farve, så den matcher blækket.

Gæller:
Gællerne er hvide fjerlignende strukturer, der gør, at blæksprutterne kan trække vejret under vandet ligesom fisk. Når vand kommer ind i kappen, bruges gællerne til at trække ilt ud af vandet og smide CO_2. De er foldet, så de får så stort et overfladeareal som muligt.

Hjerter og nyrer:
En blæksprutte har tre hjerter. To gællehjerter der sidder ved foden af hver gælle og pumper blodet fra kroppen op i gællerne, og et hjerte der pumper blodet fra gællerne rundt i kroppen. Blodet i en blæksprutte er farveløst og bliver blåt, når det kommer ud i luften. Det er fordi, det bruger det kobberholdige hæmocyanin i stedet for hæmoglobin til at transportere ilt. Nyrens funktion er blandt andet at rense blodet for affaldsstoffer og er i blæksprutten placeret oven på hjertet.

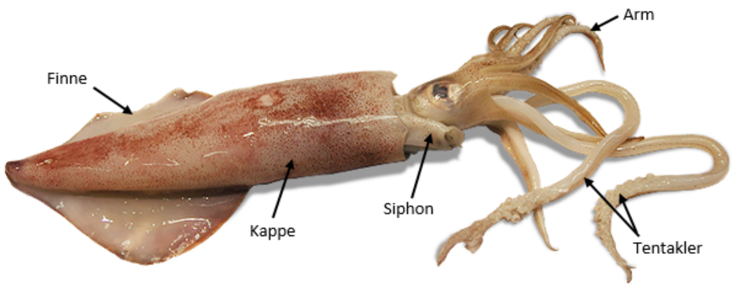
Hjernen:
Hjernen er som nævnt før stærkt udviklet i blæksprutter. Den er placeret imellem øjnene og ligger rundt om spiserøret.

Gladius:
Blæksprutten bliver holdt stiv af en fjerformet skal – gladius – der sidder i kappen. Det er, hvad der er tilbage af dens forfædres hårde ydre skal.

Dissektionsvejledning af tiarmet blæksprutte (*Loligo* sp.)

Baseret på [27] og [28]

Ydre morfologi



Figur 4.24: *Loligos* ydre morfologi

1. Læg mærke til hvor strømlinet blækspruttens krop er, hvis armene er udstrakte.

2. Se på huden: overalt er der rødbrune pletter, det er kromatoforerne. Man kan måske også se hvidlige pletter på den lyse underside af finnerne. Det er iridocyter.

3. Se og mærk på tentaklerne, armene, og deres sugekopper.

4. Tentaklerne er nogle gange trukket tilbage i lommer under øjnene. Skær lommerne op for at se, hvor lange tentaklerne er.

Indre morfologi

1. Se på siphonen – den har en mekanisme, der gør at vand ikke flyder ind igennem den. Hvorfor det?

2. Læg blæksprutten på ryggen og skær eller klip kappen op. Den mørke side er ryggen.

3. Skær siderne af kappen af, så de ikke er i vejen.

4. De organer, I kan finde i blæksprutten, kan ses på figur 4.24, 4.25, og 4.26 og er beskrevet i afsnittet 'Anatomi'. Prøv at se, om I kan finde dem alle, men pas på med at prikke hul på blæksækken.

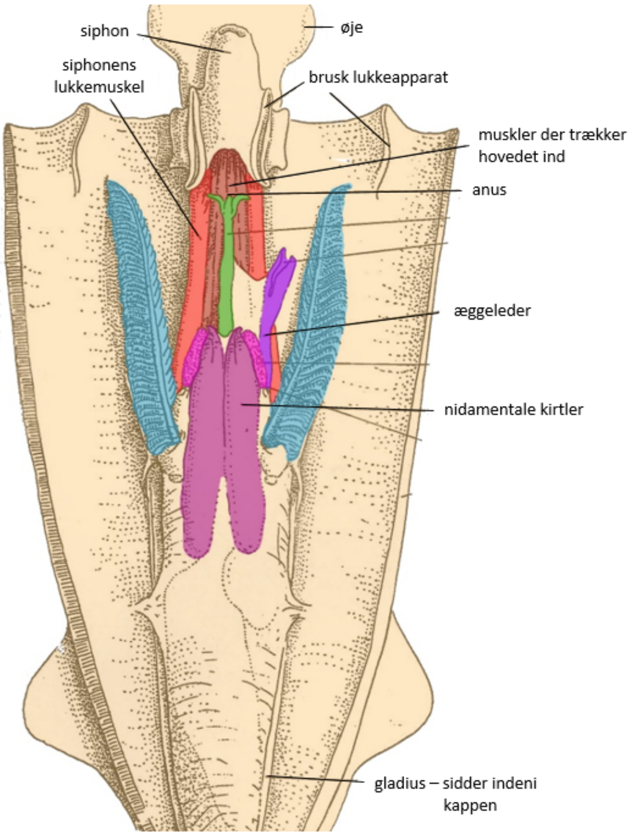
5. Vær opmærksom på, at nogle organer kun er i enten hunnerne eller hannerne. Hvilke organer er der tale om?

6. Prøv at finde et æg eller en sperm og kig på det i mikroskopet – spørg en underviser, hvordan man klargør sådan et præparat.

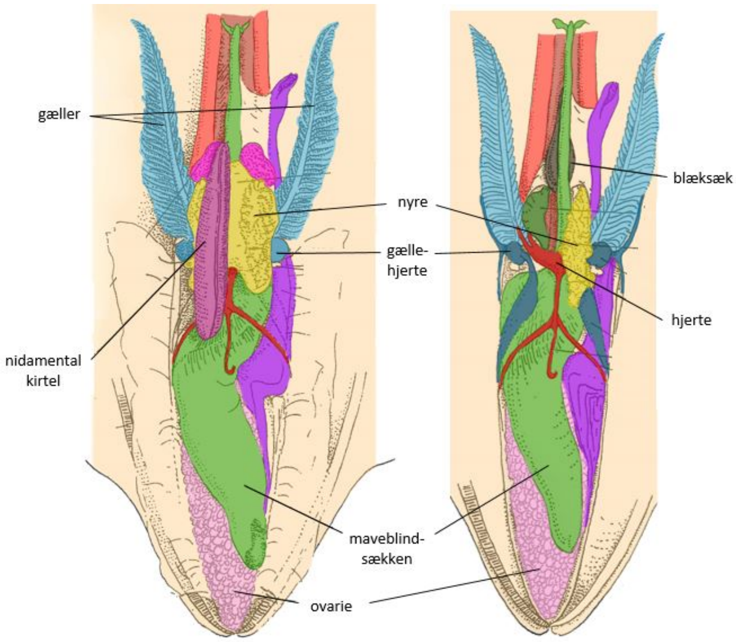
7. Hvis I skærer forsigtigt mellem øjnene, vil I kunne se hjernen.

8. Skær igennem øjet og se om I kan finde linsen.

9. Inde i næbbet er radulaen, en form for ru tunge, som er meget svær at få fat på.



Figur 4.25: *Loligos* anatomi



Figur 4.26: *Loligos* anatomi

Kapitel 5

Datalogi

5.1 Introduktion

Hvad er datalogi? Du har nok en meget god idé om, hvad fysik, kemi, matematik og biologi er, da du allerede har arbejdet med det i skolen. Men mange ved ikke rigtig, hvad datalogi handler om. Altså det er jo noget med computere og programmering, eller?

Datalogi er et meget teoretisk område, som beskæftiger sig med emner såsom; digital logik, hvordan en processor er opbygget, hvordan kode køres, hvordan en database fungerer, hvordan kommunikationsprotokoller over internettet fungerer, kryptologi og sikkerhed, hvilke ting som man overhovedet kan beregne, klassificering af hvor svære ting er at beregne, forskellige typer af programmeringssprog og meget mere. Langt det meste af dette er egentlig ikke essentielt til at kunne lave de programmer, som langt de fleste personer bruger og involverer matematik mere end programmering.

Så datalogi er en god del mange ting. Vi vil i denne bog kigge på noget digital logik, altså hvordan det nederste lag i en computer kører på binære tal - 00101010, og så selvfølgelig noget programmering.

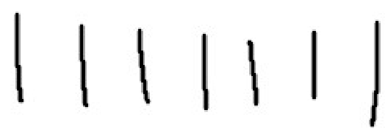
5.2 Talsystemer

For at kunne forstå, hvordan det binære talsystem fungerer, er vi nødt til at forstå, hvad et talsystem er, og hvordan et talsystem grundlæggende er opbygget.

Et talsystem definerer et sæt af symboler, der bliver brugt til at repræsentere en mængde. Mennesket har talt ting lige så længe, det har eksisteret, og har af denne årsag ledt efter metoder for at holde styr på og for at kunne repræsentere disse ting, som mennesket har talt.

Tally Marks

Da man i starten skulle tælle ting, benyttede man sig af tally marks. Tally marks er den simpleste måde, hvorved man kan fremvise en mængde. Det foregår via streger:



Figur 5.1: Her ses et eksempel på 7 tally marks

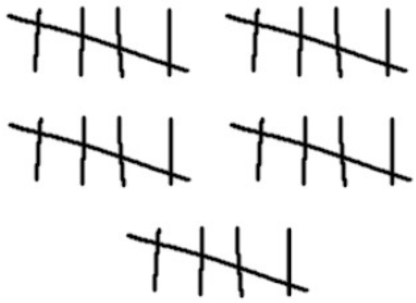
Tally marks er nemme og simple at forstå, men hvor det brillerer i simplicitet ved små mængder, så er det samme simplicitet, som gør store tal enormt svære at se og forstå, når man benytter sig af tally marks. Da man først opfandt tally marks, så havde man ikke ord, der definerede mængder. Det decimale talsystem fandtes ikke, og de vidste derfor ikke, at der var 7 tally marks i figur 5.1, men de havde stadig en god fornemmelse for, hvad mængden af streger betød. 7 streger er ikke meget og er af denne grund nemt og hurtigt at forstå, men forestil dig i stedet, at du skulle finde frem til side 253 i en bog, hvor sidetallene stod med tally marks. Det ville være totalt uoverskueligt, og tage lang tid at finde frem til den korrekte side.

Gruppering

For at øge læsbarheden af tally marks begyndte man at benytte sig af gruppering af mængder på 5. I stedet for 5 streger ved siden af hinanden sætter man i stedet den 5. streg diagonalt over de 4 første. Et eksempel på dette ses på følgende figur:

Figur 5.2: Et eksempel på 7 tally marks med gruppering

Denne udvikling øgede markant hastigheden for forståelse af en tally mark mængde, og var en vigtig udvikling af talsystemet. Et andet eksempel kan ses herunder.



Figur 5.3: 5 grupper af 5 tally marks, i alt: 25

Grundtal

Grundtallet af et talsystem - også kaldet dens *radix* eller *base* definerer, hvor mange tal eller symboler der bliver brugt til at repræsentere mængden. Tally mark talsystemet kaldes på engelsk for et "unary numeral system", som kan oversættes til at betyde *et talsystem med grundtallet **1***. Tally mark talsystemet har således **radix 1** og har **1 symbol** - stregen - til at repræsentere mængden.

Det gælder derfor for et talsystem, at man ***for radix N skal have N antal symboler** til at repræsentere mængden.* I teorien kan man opfinde et uendeligt antal talsystemer så længe, at man for radix N har N antal af symboler til at repræsentere mængden.

Dette ville dog hurtigt blive meget komplekst at arbejde med. Har man eksempelvis et talsystem med radix på **200.000**, så ville man skulle huske 200.000 symboler. Der findes mange velkendte og velbrugte talsystemer, som har et reelt brugsformål. Heraf kan nævnes:

- Det binære talsystem med radix **2**.
  - Det binære talsystem bruges af næsten alle moderne computere og lignende enheder.
- Det oktale talsystem med radix **8**.
  - Det oktale talsystem bruges bl.a. i luftfartsindustrien som kode, der transmitteres via flyenes transponder til radarer på jorden – her bliver det brugt til at kendetegne flyene på radarskærmen.
- Det decimale talsystem - som vi mennesker bruger til hverdag - med radix **10**.
  - Mennesket har 10 fingre og 10 tæer. Alle tal, vi normalt dagligt læser, er repræsenteret af det decimale talsystem.
- Det hexadecimale talsystem med radix **16**.
  - Hexadecimale tal er en menneskevenlig måde at repræsentere binære værdier, da hvert hexadecimalt ciffer svarer til fire bit – en nibble – og ligeledes svarer to hexadecimale cifre til en byte.

Vi vil i de følgende afsnit komme ind på, hvordan *det decimale talsystem* fungerer og dernæst bruge disse principper til at forklare *det binære talsystem*. Hvis I vil vide mere om de forskellige talsystemer og blive bedre bekendt med eksempelvis det oktale talsystem eller det hexadecimale talsystem, kan I med fordel besøge Wikipedia eller disse elementer i bibliografien: Historie[29], Binær[30] og Base 12[31].

Det decimale talsystem

Mennesket har i mange århundreder benyttet sig af det decimale talsystem, og en forklaring bag dette findes med stor sandsynlighed ved, at vi har 10 fingre og 10 tæer. Men hvordan fungerer det decimale talsystem egentlig rent teoretisk? Det decimale talsystem har, som før nævnt, en **radix på 10** og består derfor af **10 symboler**.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Figur 5.4: De 10 symboler, som repræsenterer det decimale talystem

Med disse 10 symboler kan vi repræsentere enhver mængde, der ønskes, i det decimale talsystem. En tilfældig mængde kunne være tallet 1.973. For at sikre, at den repræsenterede mængde læses i det korrekte talsystem - det decimale talsystem - skrives mængden op som følgende: 1.973_{10}.

Positionsnotation

Det decimale tal 1.973_{10} består af de 4 symboler/cifre; 1, 9, 7, og 3, som alle har en forskellig værdi afhængig af deres position. Denne notation, også kaldet positionsnotation, er essentiel for vores forståelse af talsystemer og fungerer på følgende måde:

Cifret længst mod venstre (1) kaldes det *mest betydende ciffer* og cifret længst mod højre (3) kaldes det *mindst betydende ciffer*. Cifrene mellem disse to positioner har stigende betydning/værdi fra højre mod venstre (henholdsvis 7 og 9). Forvirrende? Frygt ej! Det er normalt, da vi jo alle allerede godt ved, hvordan man tæller, og hvordan tal fungerer, men denne grundviden bruges til at finde ud af den decimale værdi af tal fra

Ciffer	1	9	7	3
Position	4	3	2	1
Potens (Radix$^{\text{N-1}}$)	$10^{4\text{-}1} = 10^3$	$10^{3\text{-}1} = 10^2$	$10^{2\text{-}1} = 10^1$	$10^{1\text{-}1} = 10^0$
Potensværdi	$10^3 = 1.000$	$10^2 = 100$	$10^1 = 10$	$10^0 = 1$
Positionsnavn	Tusinder	Hundreder	Tiere	Enere
Regnestykke 1:	$1 \cdot 1.000 + 9 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3 \cdot 1$			
Regnestykke 2:	$1.000 + 900 + 70 + 3 = 1.973_{10}$			

Tabel 5.1: Udregningstabel for det decimale tal 1.973_{10}

andre talsystemer, og er derfor vigtig at kende til, da den gør andre talsystemers tal mere forståelige.

Startende fra det mindst betydende ciffer i det decimale tal 1.973_{10} - dvs. 3 - findes den decimale talværdi ved at tage 3 og gange med radix^{N-1} , hvor radix er talsystemets grundtal og N er cifferets position fra højre mod venstre. Gøres dette for alle cifre fås følgende udregningstabel:

Med positionsnotation er det dermed muligt at genbruge det samme ciffer ved at tilføje en ny værdi til cifferet baseret på dets position i tallet. Dette er gældende for alle talsystemer, som vil blive introduceret.

Det binære talsystem

Elektronik benytter elektricitet for at kunne fungere. I al sin enkelthed kan elektricitet have to stadier; tændt og slukket. Disse to stadier kan repræsenteres med symbolerne 1 og 0 – hvilket ligeledes er de symboler, som benyttes i det binære talsystem. Det binære talsystem har en **radix på 2** og består af de **to symboler *1* og *0***. Disse symboler kaldes bit i det binære talsystem og ikke ciffer som i det decimale talsystem.

0 1

Figur 5.5: De 2 symboler, som repræsenterer det binære talystem

Et binært tal kunne for eksempel se ud som følgende: $1101\ 1011_2$. Bemærk opdelingen hver fjerde bit. Dette kaldes en nibble og øger læsbarheden af binære tal. Tallet består i alt af 8 bit – også kaldet en byte – og benytter sig af samme positionsnotation som det decimale talsystem.

Konvertering fra binær til decimaltal

Startende fra det *mindst betydende bit* - i det binære tal $1101\ 1011_2$ - dvs. tallet længst mod højre (1) - findes den decimale talværdi ved at tage 1 og gange med radix$^{\text{N-1}}$, hvor radix er talsystemets grundtal, og N er cifferets position fra højre mod venstre. Gøres dette for alle bit fås følgende udregningstabel:

Ciffer	1	1	0	1	1	0	1	1
Position	8	7	6	5	4	3	2	1
Potens (Radix$^{\text{N-1}}$)	$2^{8\text{-}1} = 2^7$	$2^{7\text{-}1} = 2^6$	$2^{6\text{-}1} = 2^5$	$2^{5\text{-}1} = 2^4$	$2^{4\text{-}1} = 2^3$	$2^{3\text{-}1} = 2^2$	$2^{2\text{-}1} = 2^1$	$2^{1\text{-}1} = 2^0$
Potensværdi	$2^7 = 128$	$2^6 = 64$	$2^5 = 32$	$2^4 = 16$	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$
Regnestykke 1:	$1 \cdot 128 + 1 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$							
Regnestykke 2:	$128 + 64 + 16 + 8 + 2 + 1 = 219_{10}$							

Tabel 5.2: Udregningstabel for det binære tal $1101\ 1011_2$

Opgaver - Binær til Decimal

• **Opgave 5.2.1:**
1) 110_2
2) $1\ 1000_2$
3) $101\ 1111_2$
4) $1111\ 1111_2$
5) $1\ 0000\ 0000_2$

•• **Opgave 5.2.2:**
1) $110\ 1101\ 1111_2$
2) $1011\ 1110\ 1001_2$
3) $11\ 1000\ 1101\ 1111_2$
4) $1111\ 0000\ 1111\ 1111\ 1111_2$
5) $100\ 0000\ 0010\ 0000\ 0001\ 0000\ 0000_2$

••• **Opgave 5.2.3:**
1) $1111\ 0000\ 1111\ 0000\ 1111\ 0000\ 1111_2$
2) $1010\ 1111\ 0101\ 0110\ 1001\ 0001\ 1000\ 1000\ 1100\ _2$
3) $0011\ 0001\ 1110\ 1000\ 1011\ 0111\ 0100\ 0101\ 0011\ 0010\ 0011\ 1101\ 0010\ 1110\ 0001\ 0000\ 1000\ 1101\ 1111_2$

Decimal til binær

Succesiv division

Successiv division kan bruges til at konvertere decimal til ethvert talsystem. Metoden fungerer på følgende måde:

1. Man tager decimaltallet, som man ønsker at konvertere til et andet talsystem, og dividerer med dette talsystems radix.

2. Resultatet af divisionen findes.

   a) Hvis divisionen ikke er komplet, og der er rest, så udtrækkes denne restværdi ved at gange radix med kommaværdien i resultatet.

   b) Heltallet fra resultatet trækkes ned på en ny linje, og restværdien noteres.

3. 1. og 2. gentages indtil decimaltallet ikke længere kan divideres med radix.

4. Det mindst betydende ciffer i det konverterede tal er den første restværdi, og det mest betydende ciffer i det konverterede tal er den sidste restværdi.

Forvirret? Forståeligt, så her er et eksempel, hvor den decimale værdi af tallet 206_{10} beregnes:

Division - Tal/radix	Resultat	Divisionsrest
206/10	20,6	6 →**LSD** (Least Significant Digit)
20/10	2	0
2/10	0,2	2 →**MSD** (Most Significant Digit)
Decimaltal	$\mathbf{206_{10}}$	

Tabel 5.3: Konverteringstabel for det decimale tal 206_{10} til et decimalt tal

Division - Tal/radix	Resultat	Divisionsrest
412/2	206	0 →**LSB** (Least Significant Bit)
206/2	103	0
103/2	51,5	1
51/2	25,5	1
25/2	12,5	1
12/2	6	0
6/2	3	0
3/2	1,5	1
1/2	0,5	1 →**MSB** (Most Significant Bit)
Binært tal	$\mathbf{1\ 1001\ 1100_2}$	

Tabel 5.4: Konverteringstabel for det decimale tal 412_{10} til et binært tal

Decimal til binær

Vi konverterer 412_{10} til binær:

Opgaver - Decimal til Binær

• **Opgave 5.2.4:**
1) 2_{10}
2) 8_{10}
3) 16_{10}
4) 31_{10}
5) 72_{10}

•• **Opgave 5.2.5:**
1) 128_{10}
2) 255_{10}
3) 677_{10}
4) 1.042_{10}
5) 4.605_{10}

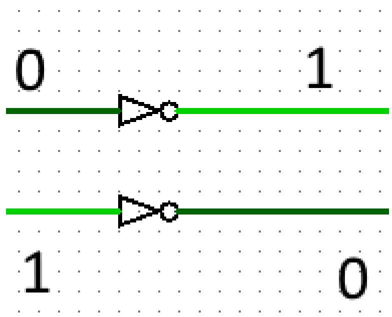
••• **Opgave 5.2.6:**
1) 58.723_{10}
2) 112.521_{10}
3) $1.068.723_{10}$

5.3 Logik

Logik er en meget central del af datalogien. Vi bruger det blandt andet til at lave computere. Computere er opbyggede af såkaldte ***logic gates***, som blandt andet muligggører, at vi kan lave matematiske operationer såsom plus og minus. I dette kapitel vil vi introducere jer til disse logic gates, samt hvordan de virker, og hvad deres gøremål er.

Så hvad er en logic gate? En gate er et simpelt kredsløb med én eller flere indgange og én udgang. Indgangene tager imod én af to boolske værdier, *0 eller 1*. En boolsk værdi skal forstås som noget, der enten er ***sandt = 1*** eller ***falsk = 0***. Udgangen er ligeledes en boolsk værdi, og dens værdi afhænger af indgangenes værdier, samt hvilken type gate, der er tale om. For bedre at kunne forstå gates vil nogle eksempler blive præsenteret. De første gates, som vi vil vende vores øjne imod, er de basale gates. Årsagen til, at de kaldes de "basale" gates er, fordi alle andre gates kan opbygges af dem. Den første af disse, som vi vil præsentere, er en såkaldt `NOT` gate. Den ser ud som forneden. Prøv at gætte dens funktion inden du læser videre.

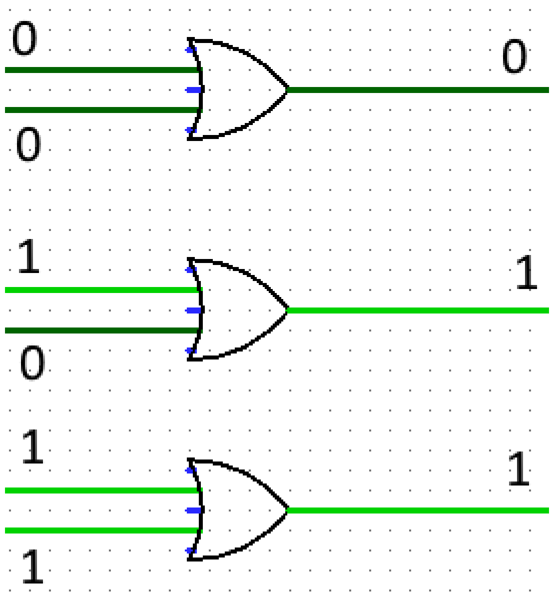
`NOT` gate



Figur 5.6: `NOT` gates

Du har nu nok gættet, at NOT-gaten tager et input og inverterer det. Med dette menes, at hvis inputtet er falsk (0), så bliver outputtet sandt(1), og omvendt ved sandt input (1) bliver outputtet falskt (0). Næste gate er en `OR` gate, og igen opfordrer vi til, at du forsøger at finde ud af dens funktion, inden du læser videre.

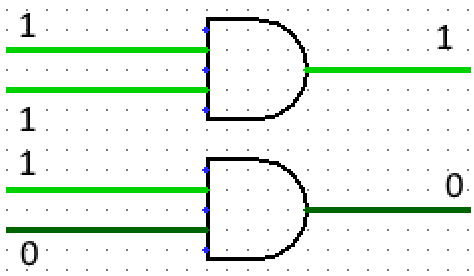
`OR` gate



Figur 5.7: `OR` gates

En `OR` gate er en tand mere spændende end en `NOT` gate. En `OR` gate tager to inputs og giver ét output. Hvis blot ét af de to inputs er sande, så resulterer det i sandt output. Hvis ingen er sande, så er outputtet falskt. Næste gate er en `AND` gate, og vi opfordrer endnu en gang til, at du forsøger at finde ud af dens funktion, inden du læser videre.

`AND` gate



Figur 5.8: `AND` gates

`AND` gaten er den sidste af de tre grundlæggende gates. Den tager, ligesom `OR` gaten, to input og giver ét output. `AND` gaten har et sandt output såfremt, at begge af de to inputs er sande, hvis ikke, så er outputtet falskt.

Sandhedstabeller

Sandhedstabeller er en metode, hvorved man kan illustrere, hvordan logiske kredsløb fungerer, da man kan vise, hvilke outputs man kan få fra kombinationer af inputs. Forneden ses sandhedstabeller for de tre basale gates.

A	NOT
0	1
1	0

Tabel 5.5: Sandhedstabel for en `NOT` gate

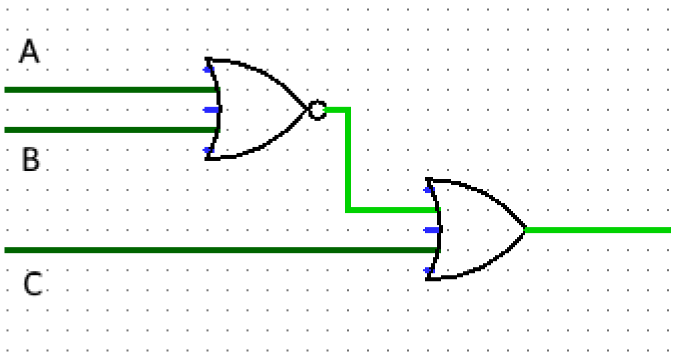
A	B	OR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabel 5.6: Sandhedstabel for en `OR` gate

A	B	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabel 5.7: Sandhedstabel for en `AND` gate

Sandhedstabeller fungerer også for sammensatte kredsløb. Forneden kan det sammensatte kredsløb af en `NOR` gate og en `OR` gate ses, samt den tilhørende sandhedstabel.



Figur 5.9: En `NOR` og en `OR` gate sat sammen

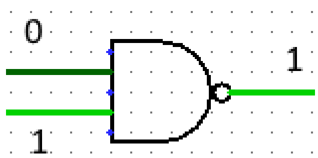
A	B	C	Out
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Tabel 5.8: Sandhedstabel for det kombinerede kredsløb

Flere gates

De basale gates er ikke de eneste gates, der findes. Vi vil nu introducere 3 andre gates, der også kan benyttes. Disse tre gates er blot kombinationer af de tre tidligere gates, men har mere komplekse funktionaliteter. Den første er en `NAND` gate og kan ses forneden.

`NAND` gate



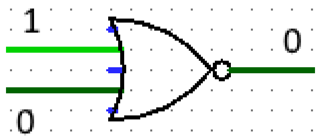
Figur 5.10: En `NAND` gate

`NAND` gaten er faktisk det totalt modsatte af en `AND` gate. Dette betyder, at output kun er falskt, såfremt begge inputs er sande. Sandhedstabellen for en `NAND` gate kan ses forneden. Herefter vil vi kigge på en `NOR` gate.

A	B	`NAND`
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabel 5.9: Sandhedstabel for en `NAND` gate

`NOR` gate



Figur 5.11: En `NOR` gate

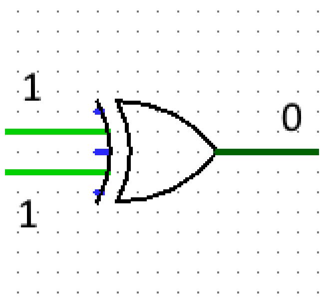
`NOR` gaten virker modsat af OR gaten, så det er kun, hvis begge input er falske, at gaten er sand. Sandhedstabellen kan ses forneden.

A	B	`NOR`
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Tabel 5.10: Sandhedstabel for en `NOR` gate

`XOR` gate

Den sidste gate, som vi gerne vil præsentere jer for inden, at I får nogle opgaver, er kendt som en `XOR` gate. `XOR` står for exclusive `OR` gate. Dette betyder, at outputtet kun er sandt, såfremt de to inputs er forskellige. `XOR` gaten, samt dens sandhedstabel, kan ses forneden.



Figur 5.12: En `XOR` gate

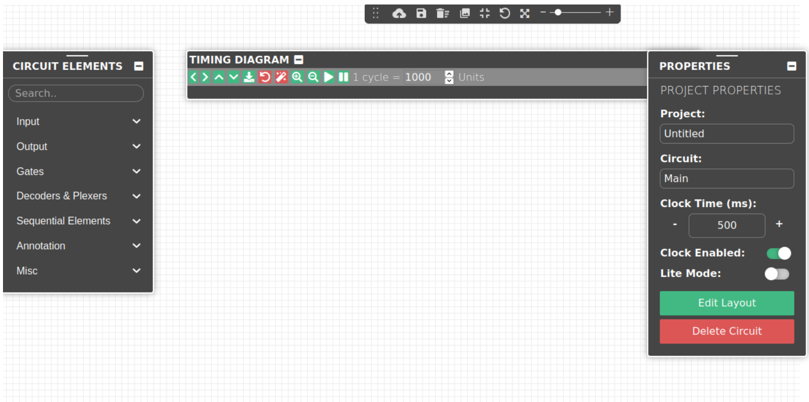
A	B	`XOR`
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabel 5.11: Sandhedstabel for en `XOR` gate

CircuitVerse

Inden at I kan begynde med opgaverne, skal I kende til et program, som kan bygge de her kredsløb. Vi vil til formålet benytte online programmet CircuitVerse.

Under *inputs* vil I finde en inputknap (har et 1 tal på sig), som kan skiftes imellem 0 og 1 alt afhængigt af ønsket inputværdi. Denne bruges til at aktivere/deaktivere indgangene i kredsløbet. Når I åbner *output*-menuen, kan I bruge den, der hedder LED eller den, der



Figur 5.13: CircuitVerse, link: https://circuitverse.org/simulator [32]

hedder output, som outputtet til jeres kredsløb. Under *gates* findes de relevante gates til opgaverne. Måden, man sætter elementerne i brug, er ved at trække dem ud til den ternede baggrund. Derefter kan man forbinde deres grønne porte, så systemet bliver helt.

Logik opgaver

- **Opgave 5.3.1:**
  Få en LED til at lyse i CircuitVerse såfremt inputtet er falskt

- **Opgave 5.3.2:**
  Få en LED til at lyse, hvis blot én af to inputs er sande.

- **Opgave 5.3.3:**
  Få en LED til at lyse, hvis begge input er sande.

•• **Opgave 5.3.4:**
Byg jeres **egen** `NAND` gate og test om kombinationerne af inputs og tilhørende output stemmer overens med sandhedstabellen i Tabel 5.9.

•• **Opgave 5.3.5:**
Byg jeres **egen** `NOR` gate og test om kombinationerne af inputs og tilhørende output stemmer overens med sandhedstabellen i Tabel 5.10.

••• **Opgave 5.3.6:**
Byg jeres **egen** `XOR` gate og test om kombinationerne af inputs og tilhørende output stemmer overens med sandhedstabellen i Tabel 5.11.

Adders

Nu har vi lært lidt om gates, men hvilke mere avancerede funktionaliter kan man opnå ved at kombinerere disse? Jo, man kan blandt andet addere binære tal. I denne del af logikkapitlet vil vi adressere såkaldte half adders og full adders.

Half adder

Half adders er et kredsløb, som tager to bits som inputs (de to tal der skal adderes) og producerer to binære outputs. Det ene binære output er en sum bit, hvilket er det, som forbliver i samme kolonne af additionen. Den anden er en carry bit, som er det, vi har i mente (repræsenterer et større tal). Forneden kan en sandhedstabel for en half adder ses, hvor S står for sum og C for carry.

A	B	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Tabel 5.12: Sandhedstabel for en half adder

Full adder

Problemet ved half adders er, at de ikke tager højde for, at der potentielt kan være noget i mente fra en tidligere addition, som skal tages med i regnestykket. Derfor vil man hellere bruge en full adder, som netop kan gøre dette. En full adder tager altså tre bits som inputs, hvoraf to af dem er de to bits, der skal adderes og den sidste er en carry in (ind). Full adderen giver, ligesom half adderen, to outputs, en carry out (ud) og en sum. Forneden kan sandhedstabellen for full adderen ses.

A	B	Cin	Cout	S
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
0	1	1	1	0
1	1	1	1	1

Tabel 5.13: Sandhedstabel for en full adder

Det er nu din tur til at forsøge at bygge først en half adder og derefter en full adder ud fra sandhedstabellerne.

●●●● **Opgave 5.3.7:**
Byg en half-adder (addere to bits)

●●●●● **Opgave 5.3.8:**
Byg en full-adder (addere to bits samt en carry)

5.4 Programmering

Programmering er den måde, vi fortæller computeren, hvad den skal gøre. Man skriver en tekstfil med instruktioner, som computeren læser og så forsøger at udføre. Men computeren er meget striks med, at instruktionerne skal være præcise, ellers giver den fejl.

De forskellige instruktioner er lidt ligesom LEGO-klodser, der kan sættes sammen og bygge næsten alting. Der er mange forskellige byggeklodser og mange forskellige byggeteknikker, og vi når ikke dem alle, men det fundamentale introduceres. Men ligesom forskellige LEGO-klodser kan høre til forskellige byggesæt med hver deres instruktioner, så findes der mange forskellige programmeringssprog, som har hver deres skrivemåde og instruktionssæt. I denne bog vil vi lære jer at bruge programmeringssproget **Python**.

Colaboratory

Vi koder via Google Colaboratory. Log ind på Google og gå ind på Drive. Tryk på den store ”ny” knap og naviger til ”flere” og så ”tilknyt flere apps”. Der er et søgefelt. Søg på ”Colaboratory” og installér. Tryk derefter igen på ”ny” knappen og ”flere”, men vælg så ”Google Colaboratory”. Du får nu et Google dokument med en box, der har en ”play” knap på. Du kan skrive kode i boksen og køre det ved at klikke på play.

Hello World!

Vi kan få computeren til at lave mange spændende udregninger, men for at det giver mening, skal vi udskrive resultatet til brugeren. Funktionen for at få computeren til at udskrive noget data er `print()`. Prøv at skrive linjen her og kør den:

```
print("Hello World!")
```

At lave et program, der skriver ”Hello world!”, er den første ting, en programmør gør, når de lærer et nyt sprog.

Sekvens

Computeren læser instruktionerne i programmet én linje ad gangen. I Python har den ikke engang kigget på næste linje, før at den har udført den forrige. Prøv at lave lidt flere print instruktioner:

```
print("Hello World!")
print("How are you today?")
print("Line 3!")
print("Line 4!")
print("Line 5!")
```

Alle populære programmeringssprog bruger engelsk, og der kan generelt være nogle problemer ved at bruge æ, ø og å. Vi holder os derfor hovedsageligt til at skrive engelsk kode, men dansk er også en mulighed.

Matematik og variabler

En computer er essentielt en meget hurtig og avanceret lommeregner og kan selvfølgelig klare noget matematik:

```
print(2+3)
print(3+10*57-14)
print(42/7-(4+2))
print(0.5*13+7)
```

NB: Fordi programmeringssproget er på engelsk, bruges der "." til decimaltal og ikke ",".

En af de vigtigste ting i programmering er variabler. En variabel er lidt ligesom en kasse, hvor man kan opbevare ting i. En variabel har et navn, som vi bruger til at referere til den. Det er lidt ligesom, at vi giver kassen en addresse, så computer-postmanden kan finde den. Et variabelnavn skal starte med et bogstav, men kan indeholde tal efter første bogstav. Et variabelnavn kan ikke indeholde mellemrum, men kan indeholde underscore "_" istedet. så_variabler_med_flere_ord_skrives_således
Prøv at gemme nogle variabler:

```
x = 2
y = 5
temperature = 30
the_answer = 42
```

Og vi kan så referere til variablerne ved deres navn

```
print(the_answer)
box_area = x * y
print(box_area)
```

At regne med tekst

Computeren kan også arbejde med tekst. For at sætte tekst ind i programmet skal det omringes med "". Tekst uden "" tænker computeren er en del af instruktionerne:

```
text_variable = "A piece of text"
print("text_variable")
```

```
print(text_variable)
```

Ovenstående kode printer først "text_variable" og printer derefter tekstvariablen, som er "A piece of text".

Computeren kan lave en masse forskellige operationer med tekst, men her er de mest simple:

```
combined_text = "Nobody expects " + "the spanish inquisition"
texttexttext = "Text" * 3
four = len("text")
```

Her sættes to stykker tekst sammen, et stykke tekst optræder flere gange og vi får længden af et stykke tekst.

Tag noget input

Du kan også få computeren til at spørge brugeren efter et input. Du kan både spørge om et stykke tekst eller efter et tal:

```
print("Giv mig noget tekst:")
text_input = input()
print("Giv mig et tal:")
number_input = float(input())

print(text_input)
print(number_input)
```

Sandt og falsk eller ikke sandt?

Computeren kan også arbejde med logik ligesom logic gates. Der er en række sammenligningsoperationer, som giver en "sandhedsværdi", der enten er `True` eller `False`. For at tjekke at to værdier er ens, bruges to lighedstegn "==", da ét lighedstegn bruges til at sætte variabler, som før set:

```
print(4 < 5)
print(2.2 == 2.3)
print("Hej" == "Nej")
```

Printer først `True`, altså sand, og så to `False`, altså falsk. Computeren kan også regne med sandhedsværdier ved at bruge `and` eller `or`. Dette fungere præcis som logiske gates:

```
print(True and True)
print(True or False)
print(not False)
print(True and False or not True)
```

NB: `True` og `False` skal staves med stort og `not`, `and` og `or` skal staves med småt. Alle 5 er et "reserveret ord", som ikke kan bruges som variabelnavn.

Der er også operatorer for "større eller lig" og "ikke ens". Her bruges krokodillenæb sammen med lighedstegnet og til ikke ens bruges et udråbstegn foran lighedstegnet:

```
print("2 er større eller lig 3")
```

```
print(2 >= 3)
print("7 er mindre eller lig 7")
print(7 <= 7)
print("Hej er ikke lig med Nej")
print("Hej" != "Nej")
```

Vi kan altså sammenligne tal på mange måder:

Python symbol	Matematisk symbol	Forklaring	Eksempel
`>`	$>$	Større end	`4 > 2`
`>=`	$\geq$	Større end eller lig med	`4 >= 4`
`<`	$<$	Mindre end	`2 < 4`
`<=`	$\leq$	Mindre end eller lig med	`2 <= 4`
`==`	$=$	Lig med	`3 == 3`
`!=`	$\neq$	Ikke lig med	`2 != 4`

Tabel 5.14: Sammenligningsoperatorer i Python

Python symbol	Forklaring	Eksempel
`not`	NOT gate	`not True`
`and`	AND gate	`True and False`
`or`	OR gate	`True or False`

Tabel 5.15: Logiske operatorer i Python

Typer

I programmering er det vigtigt at holde styr på, at der er forskel på, hvad man kan med forskellige ting. Som eksempel ved vi, at vi kan lægge tal sammen `2+3`, men hvad ville der ske, hvis vi prøvede at lægge et tal sammen med noget tekst? `2+"kat"` giver ikke rigtig mening. Så der er altså forskel på tal og på tekst. Vi siger, at det er forskellige *typer*.
De første typer, du skal kende, er de følgende:

Type	Engelsk navn	Forklaring	Eksempel
`int`	Integer	Helt tal	`42`
`float`	Floating point	Kommatal	`3.14`
`str`	String	Tekst	`"Nobody expects the Spanish Inquisition"`
`bool`	Boolean	Sandhedsværdi	`True`

Tabel 5.16: De grundlæggende typer i Python

I starten har vi brugt tekst og heltal meget og kommer fortsat til at benytte os af dem, men de andre typer er også vigtige. Hvis du er i tvivl om, hvilken type noget har, så kan du skrive:

```
print(type("Hej"))
```

Hvor du erstatter `"Hej"` med, hvad end du gerne vil vide typen af. Her får du output:

```
<class 'str'>
```

Hvor du kan se typen er `str`.
Et andet eksempel:

```
print(type(42))
```

Kan du gætte hvad output er?

```
<class 'int'>
```

Sporskifte

Indtil videre har programmet bare kørt alle instruktioner i listen, men vi kan styre, hvilke instruktioner som bliver kørt. Denne konstruktion kaldes en "`if`-sætning". Den kører en række (eller en enkel) instruktion, hvis en sandhedsværdi er sandt. Den ser således ud:

```
if(False):
  print("Bliver ikke kørt")
  print("Og bliver derfor ikke skrevet")
  print("Fordi False ikke er sandt")

print("Udenfor if sætning")
print("Så bliver skrevet")
```

Vi fortæller computeren hvilke instruktioner, der er en del af `if`-sætningen, og hvilke der er udenfor ved at "indentere", altså indrykke, de linjer, som er del af sætningen med fire mellemrum. Når instruktionerne ikke længere skal være en del af `if`-sætningen, så lad være med at indentere dem.

Der kan også tilføjes et "`else`" til `if`-sætningen, som bliver udført, hvis `if` tjekket er falskt:

```
text_input = input()
if(text_input == "UNF er sejt"):
    print("Ja, det er det")
else:
    print("Det forstod jeg ikke")
```

Kommentarer

Ofte giver det mening at skrive en note eller kommentar i koden, så andre kan forstå, hvad den skal gøre. Man kan lave en kommentar direkte i koden ved at sætte en havelåge, eller hashtag, foran linjen. Så ignorerer computeren linjen helt og hopper direkte over den. Ligeledes kan man lave en kommentar på samme linje som koden - alt efter havelågen ignoreres.

```
text_input = input()
if(text_input == "UNF er sejt"):
    print("Ja, det er det")
else:
    #Andet input ville være tosset
    print("Det forstod jeg ikke") #Dette ignoreres
```

Løkker - Iteration

Et andet basalt og helt centralt koncept indenfor programmering er såkaldte løkker. Der findes to typer af løkker, `for`-løkker og `while`-løkker. Vi vil lære jer om førstnævnte. Fælles for løkker er, at de fortsætter med at udføre én eller anden opgave indtil, at en betingelse er opnået. Se f.eks. `for`-løkken forneden, der demonstrerer, hvad der sker med UNF's cool-faktor efter tre røverier.

```
cool_faktor = 4 #UNF's aktuelle cool-faktor
for i in range(4):
    print("UNF's cool-faktor efter", i, "røverier er:",
        cool_faktor)
    cool_faktor += 2
```

Inden du kigger ned på, hvad der bliver udskrevet til konsollen, så prøv at overvej, hvad du tror, der kommer til at ske. Prøv evt. at forudsige, hvad den sidste og første værdi vil være. Det skal her nævnes, at += operatoren bare lægger vores værdi, som i dette tilfælde er 2, oveni cool-faktoren. Det er altså bare en forkortelse af at skrive cool-faktor = cool-faktor + 2. Følgende vil blive skrevet til konsollen:

```
"UNF's cool-faktor efter 0 røverier er: 4"
"UNF's cool-faktor efter 1 røverier er: 6"
"UNF's cool-faktor efter 2 røverier er: 8"
"UNF's cool-faktor efter 3 røverier er: 10"
```

Det vores `for`-løkke foretager sig, er, at den initialiserer vores variabel `i` til at være lig 0. Derefter udføres operationen i løkken, og for hver gang operationen (som er den indenterede blok) i løkken bliver udført, lægges der 1 til vores variabel `i` indtil den betingelse, som er, at `i < 4` bliver `False`. Hvilket altså er, når `i` er = 4, og operationen er blevet foretaget fire gange.

Spørg internettet

Der er meget mere programmering at lære, og vi kan på ingen måde nå det hele. Heldigvis er internettet fyldt med guides, tutorials og tips, hvis man bare søger efter dem. Her er det lettest at komme frem, hvis man søger på engelsk. Én af de vigtigste evner for en programmør er at kunne søge på ens problemstilling online og finde svaret. Ofte har programmeringssproget en hjemmeside med "docs", altså dokumentation om hvordan det virker. Ofte er dokumentation ikke super nybegynder-venlig, men heldigvis er der masser af sider, der er bedre struktureret til at guide dig igennem. Så find et Python tutorial, som siger noget for dig og få lavet noget programmering!

Programmeringsopgaver

- **Opgave 5.4.1:**
  Start helt simpelt. Lav et program, som udskriver "Hello world!"

- **Opgave 5.4.2:**
  Tjek at matematikken også virker. Kan computeren printe 32454×9348 og $7430 + (89852.6284/3956.2641)$?

- **Opgave 5.4.3:**
  Formlen for at omregne Celcius til Kelvin er $C - 273.3 = K$ Brug variabler til let at omregne disse værdier til Kelvin: 15.3 °C, 700 °C, -22.8 °C

●● **Opgave 5.4.4:**
Ændr programmet fra forrige opgave til at modtage temperaturen i input, så den er lettere at køre.
Formlen for at omregne Celcius til Fahrenheit er $(C \times 1.8) + 32 = F$.
Udbyg programmet så den konverterer Celcius til både Kelvin og Fahrenheit.

●●● **Opgave 5.4.5:**
Lav en temperaturlommeregner, som også tager enheden med.
Læs først værdien af temperaturen og læs derefter enheden, som enten er ”C”, ”K” eller ”F”.
Print derefter temperaturen i de andre enheder. *Hint: Se på Google efter diverse omregningsformler.*

●● **Opgave 5.4.6:**
Programmet herunder er starten på et simpelt eventyrspil, der udelukkende foregår i tekst. Prøv at byg videre på det:

```
health = 10
gold = 100
print("Du er på vej til Camelot, da du bliver overfaldet af en
    røver!")
print("'Dine penge eller dit liv!!' råber røveren. Tast 1 for at
    overgive dig eller tast 2 for at kæmpe imod.")
choice = float(input())
if(choice == 2):
    print("Du overrumpler røveren, men mister noget liv.")
    health = health - 4
else:
    print("Du overgiver dig og giver røveren noget af dit guld.")
    gold = gold - 80
```

●●● **Opgave 5.4.7:**
Lav et program, som tager et tal mindre end 128 og konverterer det til binær.

●● **Opgave 5.4.8:**
Lav et program, som printer tallene 0 til 10.

●●● **Opgave 5.4.9:**
Lav et program, som printer tallene 0 til 10 ved at bruge et `for`-loop.

●●● **Opgave 5.4.10:**
Lav et program, som printer alle lige tal fra 0 til 20.

●●●● **Opgave 5.4.11:**
Lav et program, som printer alle lige tal fra 0 til 20 ved at bruge et `for`-loop.

●●●●● **Opgave 5.4.12:**
Lav et program, som printer alle lige tal fra 0 til 20 ved at bruge et `for`-loop OG modulus operatoren (Google ”Python modulus”).

●●●●● **Opgave 5.4.13:**
Lav `for`-loop opgaverne, men med et `while`-loop i stedet (Google is your friend).

Bibliografi

[1] Victor J. Katz. *An Introduction to the History of Mathematics*. Pearson, Essex, 2014.

[2] Inc. Mersenne Research. *Great Internet Mersenne Prime Search*. 2021. URL: https://www.mersenne.org/primes/.

[3] June Barrow-Green. *"Sophie Germain". Encyclopedia Britannica*. 2021. URL: https://www.britannica.com/biography/Sophie-Germain.

[4] Morten S. Risager. *Introduction to number theory*. Københavns Universitet, 2020. URL: http://web.math.ku.dk/~risager/introtal/main.

[5] Wikipedia Commons. *RSA (cryptosystem)*. 2020. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/RSA_(cryptosystem).

[6] Wikipedia Commons. *Integer factorization records*. 2020. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Integer_factorization_records.

[7] Chris K. Caldwell. *Random small primes*. 2020. URL: https://primes.utm.edu/lists/small/small.html.

[8] Wikipedia Commons. *Fermat number*. 2020. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_number#Primality_of_Fermat_numbers.

[9] Eric W. Weisstein - Wolfram Mathworld. *Fermat Prime*. 2020. URL: https://mathworld.wolfram.com/FermatPrime.html.

[10] Wikipedia Commons. *Goldbach's conjecture*. 2020. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Goldbach's_conjecture#Verified_results.

[11] David S. Dummit og Richard M. Foote. *Abstract Algebra*. 3. udg. Wiley, 2003. ISBN: 978-0-471-43334-7.

[12] Salman Khan. *Dividing by a two digit number*. 2019. URL: https://www.youtube.com/watch?v=cSTRd8WOpNE.

[13] Jesper Lützen. *Diskrete Matematiske Metoder*. 2. udg. Københavns Universitet, 2019. URL: http://web.math.ku.dk/noter/filer/dis2019.pdf.

[14] Thomas H. Cormen m.fl. *Introduction to Algorithms*. 3. udg. Massachusetts Institute of Technology, 2009. ISBN: 978-0-262-53305-8.

[15] Wikipedia Commons. *Computational complexity theory*. 2020. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Computational_complexity_theory#History.

[16] J. J. O'Connor og E. F. Robertson. *Gabriel Lamé*. 2000. URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lame/.

[17] Franz Lemmermeyer. *Reciprocity Laws From Euler to Eisenstein*. 3. udg. Springer-Verlag, 2000. ISBN: 3-540-66957-4.

[18] Franz Lemmermeyer. *Proofs of the Quadratic Reciprocity Law*. 2013. URL: https://www.rzuser.uni-heidelberg.de/~hb3/fchrono.html.

[19] Victor Shoup. *A Computational Introduction to Number Theory and Algebra*. 2. udg. Cambridge University Press, 2008.

[20] Lars Pedersen. *Matematik 112. Førstehjælp til formler*. dansk. 3. udg. PRAXIS - Nyt Teknisk Forlag, 2014. ISBN: 978-87-571-2662-4.

[21] Gray Dickerson og Haight. *Acid-Base Titration Schematic*. 1979. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ChemicalPrinciplesFig2-3.jpg (bes. 05.01.2020).

[22] Wikimedia. *ImagePotassium permanganate - Wikimedia*. 2015. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Potassium_permanganate_sample.jpg (bes. 05.01.2020).

[23] *DNA — lex.dk – Den Store Danske*. URL: https://denstoredanske.lex.dk/DNA (bes. 22.02.2021).

[24] *Mælk - Rema 1000 - 1l*. URL: https://dk.openfoodfacts.org/product/5711953060762/m%7B%5Cae%7Dlk-rema-1000 (bes. 22.02.2021).

[25] *File:Levels of structural organization of a protein.svg - Wikimedia Commons*. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Levels_of_structural_organization_of_a_protein.svg (bes. 22.02.2021).

[26] *File:Amino Acid Structure.png - Wikimedia Commons*. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Amino_Acid_Structure.png (bes. 22.02.2021).

[27] Jespersen Åse og Jørgen Lützen. *Zoologisk morfologi*. Gyldendal, 2012. ISBN: 978-87-02-12764-5.

[28] *The Education Program at the New Jersey Sea Grant Consortium*. Tekn. rap.

[29] TED-Ed. *A brief history of numerical systems - Alessandra King*. 2017. URL: https://www.youtube.com/watch?v=cZH0YnFpjwU (bes. 07.03.2021).

[30] Techquickie. *Binary Numbers and Base Systems as Fast as Possible*. 2014. URL: https://www.youtube.com/watch?v=LpuPe81bc2w (bes. 07.03.2021).

[31] Numberphile. *Base 12 - Numberphile*. 2012. URL: https://www.youtube.com/watch?v=U6xJfP7-HCc (bes. 07.03.2021).

[32] IIIT-Bangalore. *CirctuiVerse - Digital Circuit Simulator online*. 2021. URL: https://circuitverse.org/ (bes. 07.03.2021).

Velkommen til Sukkertoppen Gymnasium

Sukkertoppen Gymnasium er et stort, veldrevet gymnasium med fokus på naturvidenskab, teknologi og design.
Vores nøglebegreber er høj faglighed, stor Rummelighed og et aktivt og alsidigt studiemiljø med en levende kultur både fagligt og socialt.

Du arbejder med både teori og praksis og får selvfølgelig mulighed for at slippe din indre forskerspire eller opfinder løs i vores topmoderne laboratorier og værksteder.

Hvad enten du drømmer om at deltage i kemi-olympiade eller arrangere weekendlange LAN-parties, er Sukkertoppen stedet for dig.

På Sukkertoppen Gymnasium bliver du en del af et stærkt fagligt miljø, hvor du som elev udfordres til at blive så dygtig som muligt. Det kommer blandt andet til udtryk, når vi hvert år har elever med til DM i teknologi, DM i science, biologi OL, kemi OL, datalogi OL, Georg Mohr og meget mere.

Vores 1100 elever er ambitiøse, målrettede og trives i et godt studiemiljø, hvor der er klare retningslinjer og et godt sammenhold. Vi har et aktivt elevråd og en god dialog mellem eleverne og ledelsen. Det er med til at skabe den gode stemning, du vil opleve på Sukkertoppen.

Det sociale liv er en vigtig del af gymnasiet.
På Sukkertoppen har vi et godt socialt miljø med fester, brætspilscafeer, filmklub, idrætsdage, musikarrangementer, fredagscafeer og meget andet.

Sukkertoppen Gymnasium er stolt af at huse UNF Naturfagsweekend 2021


Topsoe careers
Global challenges solved by **you**
At Topsoe, we encourage the engineers of tomorrow to not only develop next generation products, but also solve global challenges. Working in fields of saving energy, securing food supply and reducing pollution, we help our customers get more out of less while at the same time contributing to a sustainable agenda.
With multiple opportunities to work in different industries and regions of the world within one company, there are no limits to where your abilities could take you.
See our available vacancies at www.topsoe.com
topsoe.com
HALDOR TOPSØE

Tuborgfondet

Tuborgfondet støtter unge og organisationer, der som os styrker ungdommens muligheder for sammen at udleve deres drømme og handlekraft til gavn for samfundet og dansk erhvervsliv.

Dansk Ungdoms Fællesråd - DUF

DUFs lokalforeningspulje støtter de lokale foreningers arbejde for børn og unge i Danmark og Sydslesvig. Puljen kan søges af lokalforeninger og lokale grupper i DUFs medlemsorganisationer og observatørorganisationer.