Naturfagssommercamp 2020

UNF København

Ungdommens Naturvidenskabelige Forening

Kompendium til Naturfagssommercamp 2020

Kompendiet er skrevet af Rasmus Frigaard Lemvig, Marie Stuhr Kaltoft, Peter Lishmann Nielsen, Morten Raahauge Bastholm, Robert Garbrecht Larsen, Niels Anders Lyngsø Bærentzen, Knut Ibæk Topp Lindenhoff, Jens Peter Nielsen, Mette Kjærgaard Thorup, Jacob Mejlsted, Claudia Charlott Lassen, Rune Overlund Stannius, Louie Ray Eistrup Juhl, Frederick Aleksander Nilsen og Jonas Bamse Andersen. Kompendiet er trykt i juli 2020 og teksten er copyright © 2020 af UNF og forfatterne. Gengivelse med kildehenvisning tilladt.

Layout: Esben Skovhus Ditlefsen på forarbejde af Niels Jakob Søe Loft og Mick Althoff Kristensen

Opsætningen er lavet efter kompendiet til UNF Masterclass 2020 med TEXnisk ansvarlig Morten Raahauge Bastholm.

Indhold

Introduktion

Velkommen til det faglige kompendium! Kompendiet indeholder alt det faglige materiale, I kommer til at arbejde med på campen, både teori, øvelser og forsøgsvejledninger, men det er også velegnet til selvstudie. Kompendiet er skrevet af de faglige på hvert område på UNF Masterclass 2020, en tidligere weekendcamp. Alle os faglige ønsker jer god fornøjelse med campen!

Vi ønsker at rette en stor tak til Next Sukkertoppen Gymnasium og DUFs sommerpulje for at muliggøre campen. Der står mere information om sponsorerne bagest i kompendiet.

Kapitel 1

Matematik

1.1 Introduktion

Velkommen til matematikforløbet på Naturfagssommercamp! Inden vi springer ud i hovedemnet for forløbet, vil vi gerne give en lille introduktion til, hvad matematik er for en videnskab. Hvad tænker du på, når du hører ordet ”matematik”? Du tænker sikkert på regning med tal, optegning af figurer med lineal eller passer osv. Men det er faktisk slet ikke essensen i matematikken. Matematikere er ofte slet ikke gode til regning! Matematikere er til gengæld gode til at tænke abstrakt og løse problemer med meget specifikke værktøjer. Det er i arbejdet med udviklingen af disse værktøjer, at det sjove og interessante ved matematikken fremkommer.

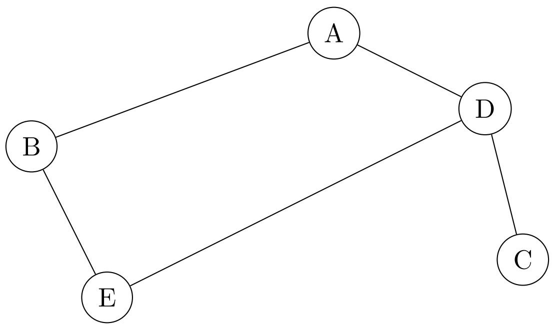
Selve forløbet

I dette forløb skal vi arbejde med grafteori, som er en gren af såkaldt diskret matematik (matematik uden ”kommatal”). Hvad skal I få ud af forløbet? Vi håber naturligvis på, at I bliver klogere, men det er faktisk vigtigere, at I udvider jeres horisont og opdager, at matematik er langt mere end bare regning. Synes du ikke, at matematik er det sjoveste fag i dagligdagen, kan faget stadig være noget for dig! Den eneste ting, du skal kunne fra starten i dette forløb er at lægge tal sammen, og så skal du være nysgerrig på at lære noget nyt.

1.2 Hvad er grafteori?

Vigtige begreber

Grafteori er studiet af grafer. Du tænker måske på grafer af funktioner i et koordinatsystem, men dette er en helt anden type graf. En graf i denne workshop er en samling af knuder og kanter, der forbinder knuderne med hinanden. Lad os se på et eksempel:



Figur 1.1: Eksempel på en graf

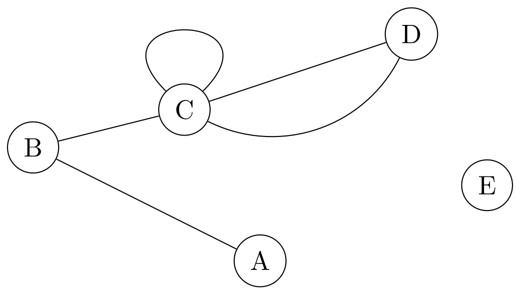
Knuder tegner vi som cirkler eller firkanter, som kan have et navn (her blot bogstaver), mens kanterne er linjerne, der forbinder knuderne. Man kan tænke på grafer på flere måder. Forestil dig f.eks. et vejkort. Her er knuderne placeringer og kanterne veje. Dette skal vi gå i dybden med til sidst i forløbet. Man kan i det hele taget tænke på grafer som illustrationer af ting, der er relateret til hinanden. Grafteori har mange konkrete anvendelser, nok fordi man kan tænke på grafer på flere måder. Dette har nok også været motivationen for opfindelsen af dette felt af matematikken. Grafteoriens opfinder er en af de største matematikere nogensinde, Leonhard Euler. Han undersøgte et konkret problem angående broerne i Königsberg (i dag hedder byen Kaliningrad og ligger i Rusland), nemlig om det er muligt at gå over hver af de 7 broer over floden Pregel (nu kaldet Pregolya) præcist én gang [1]. Lidt senere i forløbet får i lov til at gå i Eulers fodspor og løse dette problem.

I dette afsnit skal vi lære de mest grundlæggende begreber i grafteori, så vi er klar til at løse rigtige problemer i de senere afsnit. Der kan være en del begreber at huske, men heldigvis er de fleste af navnene ret intuitive.

Definition 1.2.1. Vi har følgende definitioner:

1. En *løkke* er en kant, som starter og slutter i samme knude.
2. To forskellige knuder kaldes *naboknuder*, hvis der er en kant, der forbinder dem.
3. *Valensen* af en knude er lig antal kanter, der har endepunkt i knuden (en løkke lægger 2 til valensen). Den *totale valens* for en graf er summen af valensen for alle knuder i grafen.
4. En *isoleret* knude er en knude, hvor ingen kanter har endepunkt. Med andre ord, en knude med valens 0.

Lad os illustrere disse begreber med en figur:



Figur 1.2: Illustration af begreberne i definition 1.2.1. A og B er et eksempel på to naboknuder. C har en løkke. E er en isoleret knude, idet denne knude ingen kanter har. Valensen af A er 1, for B er den 2. Valensen af C og D er henholdsvis 5 og 2.

Når man i matematik har indført en definition, vil man ofte gerne bygge ovenpå definitionerne med nogle resultater. Valens er et vigtigt begreb, som vi kommer til at bruge en del fremover. Vi har denne sætning om valensen i en graf:

Sætning 1.2.2. *Den totale valens for en graf er lig antallet af kanter gange 2.*

Bevis. Alle kanter i en graf starter og slutter i en knude (muligvis den samme knude). Altså må alle kanter bidrage med 2 til grafens totale valens. ■

Når man har vist en sætning i matematik, kan det ske, at man får et nyttigt resultat eller to mere herudfra. Sådan en følgesætning kaldes et *korollar*. Vi har sådan en hjælpesætning:

Korollar 1.2.3. *Den totale valens for en graf er et lige tal.*

Bevis. Da den totale valens for en graf er lig 2 gange antallet af kanter, må 2 gå op i den totale valens. Altså er den totale valens lige. ■

Når vi arbejder med grafer, vil vi gerne kunne beskrive, hvordan forskellige knuder er relateret til hinanden i grafen. Derfor indfører vi nogle flere begreber:

Definition 1.2.4. Lad G være en graf med knuder A og B.

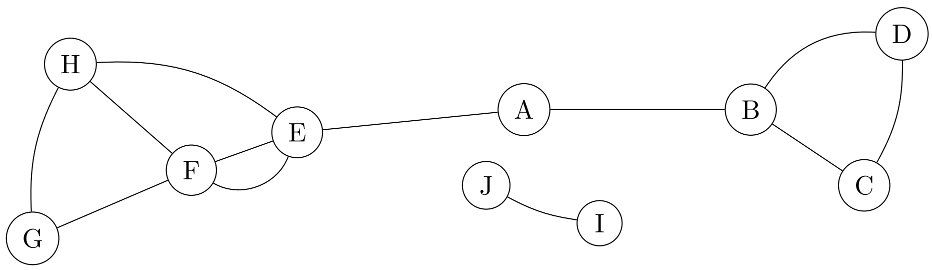
1. Der er en *rute* mellem A og B, hvis vi kan komme fra A til B ved at bevæge os langs nogle knuder og kanter i grafen. Følgen af knuder og kanter, vi bevæger os igennem, er selve ruten.
2. En *tur* fra A til B er en rute fra A til B, hvor man kun må gå langs hver kant én gang.
3. En *vej* fra A til B er en tur fra A til B, hvor man kun må passere hver knude én gang.
4. En rute kaldes *lukket*, hvis første og sidste knude på ruten er ens. Samme gælder for en lukket tur og en lukket vej. Hvis en rute, tur eller vej ikke er lukket, kaldes den *åben*.
5. En *kreds* er en lukket tur, hvor de eneste gentagne knuder er start- og slutknuden.

For at gøre definitionerne lidt lettere at huske, har vi følgende tabel:

Tabel 1.1: Tabel til begreberne i definition 1.2.4

Definition	Gentagne kanter	Gentagne knuder	Samme start- og slutknude
Rute	Tilladt	Tilladt	Tilladt
Tur	Nej	Tilladt	Tilladt
Vej	Nej	Nej	Nej
Lukket rute	Tilladt	Tilladt	Ja
Lukket tur	Nej	Tilladt	Ja
Kreds	Nej	Kun første og sidste	Ja

Ser vi på figur 1.2, kan vi se, at der er ruter mellem alle knuder undtagen E. Der findes også nogle lukkede ture. F.eks. kan vi gå fra D til C langs én af kanterne og tilbage til D gennem den anden kant. Denne tur er også en kreds. Kan du finde andre lukkede ture? Andre kredse? En anden illustration af begreberne ses i grafen herunder:



Figur 1.3: En graf med mange slags ruter.

I denne graf er der mange ruter! Dog er der ikke ruter mellem alle knuder, f.eks. findes ingen rute mellem I og A. Vi kan ligeledes finde mange ture, også lukkede af slagsen. F.eks. kan vi gå fra B til C til D og tilbage til B. Dette er også en kreds. Kan vi finde en lukket tur, som ikke er en kreds? Ja, lad os starte i F og gå til G, til H, tilbage til F, til E og tilbage til F langs den anden kant. Dette er en lukket tur, da ingen kanter bliver brugt mere end én gang, og vi både starter og slutter i F. Men vi passerer F undervejs i turen, så F optræder ikke kun som start- og slutknude. Derfor er denne lukkede tur ikke en kreds.

Se igen på figur 1.3. Der er noget særligt ved knuderne I og J i forhold til de andre knuder i grafen. I og J kan forbindes med en rute, men de kan ikke forbindes med ruter til nogle andre knuder i grafen. På samme måde kan knuderne fra A til H forbindes med ruter indbyrdes. Disse overvejelser giver os ideen til en ny definition:

Definition 1.2.5. En graf kaldes *sammenhængende*, hvis det for alle par af knuder i grafen gælder, at disse kan forbindes med en rute.

Graferne i figur 1.2 og 1.3 er ikke sammenhængende. Det er grafen på figur 1.1 til gengæld.

Nogle graftyper

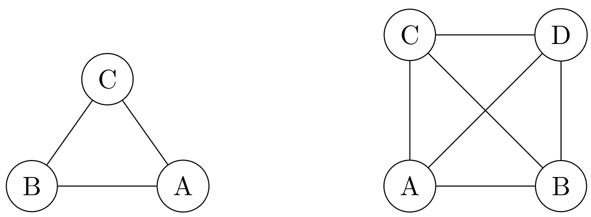
Vi vil nu komme ind på nogle bestemte typer grafer, som er gode at kende.

Definition 1.2.6. En *simpel graf* er en graf uden løkker, og hvor ingen naboknuder er forbundet af mere end én kant.

Grafen i figur 1.1 er et eksempel på en simpel graf, mens grafen i figur 1.2 ikke er en simpel graf. F.eks. har knude C en løkke. Simple grafer bliver vigtige i sidste afsnit, når vi ser på vægtede grafer. Man kan tænke på simple grafer som grafer uden "overflødige kanter", altså der er netop det antal kanter i grafen, som skal bruges, for at de samme knuder er forbundet. Vi ser nu på en speciel type af simple grafer.

Definition 1.2.7. En *komplet graf* er en simpel graf, hvori alle par af forskellige knuder er forbundet med hinanden. Den komplette graf med n knuder betegner vi som K_n.

Lad os se på de to komplette grafer K_3 og K_4 som eksempel:

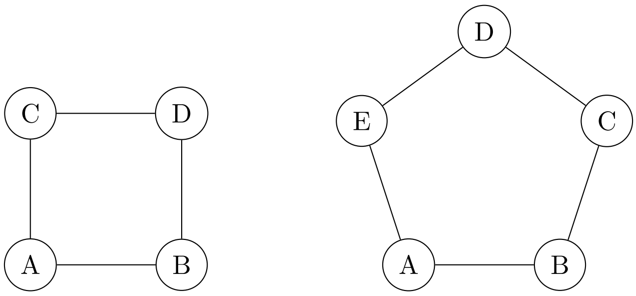


Figur 1.4: Graferne K_3 og K_4.

Den sidste type graf, vi vil kigge på her, er kredsgrafer. Definitionen er meget, som navnet antyder.

Definition 1.2.8. En *kredsgraf* er en simpel graf, hvor alle knuderne indgår i netop én kreds. Kredsgrafen med $n \geq 3$ knuder betegner vi som C_n (C'et står for "cycle", det engelske ord for "kreds").

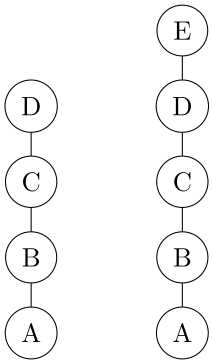
Hvorfor skal vi have $n \geq 3$? Hvis n er 2, kan vi slet ikke lave en kreds uden at skulle tegne flere kanter mellem de to knuder. Men så kan grafen ikke være simpel! Definitionen giver altså kun mening, hvis $n \geq 3$. Lad os se på et eksempel, nemlig graferne C_4 og C_5:



Figur 1.5: Graferne C_4 og C_5.

Definition 1.2.9. En *vejgraf* er en simpel graf, hvor én vej kan gennemløbe alle knuder og kanter i grafen. Vejgrafen med n knuder betegner vi P_n (P'et står for "path", det engelske ord for "vej").

Nedenfor ser vi to eksempler på vejgrafer.



Figur 1.6: Graferne P_4 og P_5.

Vi kan afslutte med at bemærke, at komplette grafer, kredsgrafer og vejgrafer (de tre standardgrafer) altid er sammenhængende. Vi er nu parate til at kaste os ud i at løse nogle interessante problemer med grafteori.

Opgaver til Hvad er grafteori?

- **Opgave 1.2.1:**
Tegn følgende:

1)En graf med tre knuder med valens 1, 2 og 3.

2)En graf med fire knuder alle med valens 1.

3)En graf med fem knuder med valens 1, 1, 2, 2 og 4.

4)En ikke-sammenhængende graf med fire knuder, alle med valens 2.

- **Opgave 1.2.2:**
Tegn dit hus/din lejlighed som en graf, hvor et værelse er en knude, og kanterne vejene mellem disse. Hvordan kan man f.eks. håndtere flere etager?

- **Opgave 1.2.3:**
Tegn en sammenhængende graf uden løkker, der indeholder netop 2 kredse.

- **Opgave 1.2.4:**
Hvor mange grafer kan du tegne, som er sammenhængende, simple, og hvor alle knuder har lige valens? Kender du nogle i forvejen? Hvor mange findes der?

•• **Opgave 1.2.5:**
Tegn graferne:

1)Den komplette graf med 5 knuder, K_5.

2)Kredsgrafen med 6 knuder, C_6.

3)En sammenhængende graf med 7 knuder. Knuderne skal have valens 1, 2, 3, 4, 5, 6 og 7.

•• **Opgave 1.2.6:**
Tegn en graf med 4 knuder. Knuderne skal have valens 1, 2, 2 og 3. Findes en graf med fire knuder af valens 1, 2, 2 og 4? Hvis ja, tegn den. Hvis nej, hvorfor ikke?

•• **Opgave 1.2.7:**
Se på K_n og C_n. For hvilke værdier af n er disse grafer ens? Husk, at $n \geq 3$.

•• **Opgave 1.2.8:**
I disse opgaver skal vi se på, om det er muligt i en gruppe af personer, at hver person er ven med et bestemt antal personer i gruppen. Vi antager, at hvis person x er ven med person y, er person y også ven med person x. Hvis det er muligt, tegn da en graf, som illustrerer vennerelationerne.

1)Antag, at gruppen er på 4 personer. Er det muligt for alle gruppemedlemmer at være venner med præcist 2 andre i gruppen?

2)Antag, at gruppen er på 7 personer. Er det muligt, at alle gruppemedlemmer er venner med præcist 5 andre i gruppen?

3)Antag, at gruppen er på 211 personer. Er det muligt, at alle gruppemedlemmer er venner med præcist 193 andre i gruppen?

•• **Opgave 1.2.9:**
Bevis, at der i alle grafer er et lige antal knuder med ulige valens. [Vink: brug korollar 1.2.3]

•• **Opgave 1.2.10:**
Giv et argument for, at alle sammenhængende grafer med n knuder har mindst $n - 1$ kanter.

Opgave 1.2.11:

1) Vis, at K_n har $\frac{n(n-1)}{2}$ kanter [Vink: Tegn K_n for f.eks. $n = 5$ og tæl op for hver kant, brug dette til at give et argument for det generelle tilfælde].

2) Vis, at en simpel graf med n knuder højst kan have $\frac{n(n-1)}{2}$ kanter.

3) Find en simpel graf, der har dobbelt så mange kanter, som den har knuder. [Vink: brug første delopgave]

De følgende opgaver omhandler en bestemt type graf, nemlig et *træ*.

Definition 1.2.10. Et *træ* er en sammenhængende graf, der ikke indeholder nogle kredse.

Opgave 1.2.12:
I denne opgave får vi en grundlæggende forståelse for træer og viser nogle centrale egenskaber for dem.

1) Tegn et træ med henholdsvis 3, 5 og 10 knuder.

2) Bevis, at et træ bliver nødt til at være simpelt.

3) Hvor mange træer findes der med 4 knuder? Hvad med 5 knuder?

4) Findes et træ med 7 knuder og 7 kanter? Hvis ja, tegn træet. Hvis nej, hvorfor?

5) Hvor mange kanter er i et træ med n knuder? [Vink: brug opgave 1.2.10. Hvad sker der, hvis man tilføjer flere kanter?]

6) Hvad er den totale valens for et træ med n knuder?

Opgave 1.2.13:

Bevis følgende resultat:

Proposition. *Lad G være en graf med n knuder. Hvis G er sammenhængende og har $n-1$ kanter, er G et træ.*

[Vink: Antag, at G indeholder en kreds. Vis, at dette fører til en selvmodsigelse, og konkludér, at G ikke kan have en kreds, ergo må G være et træ]

Definition 1.2.11. Et *blad* er en knude i en graf med valens 1.

Opgave 1.2.14:

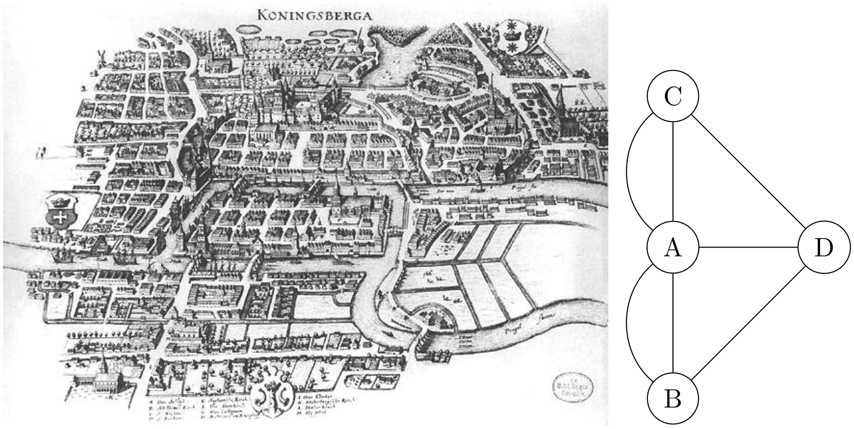
1) Bevis, at der findes mindst ét blad i et træ. [Vink: start i en vilkårlig knude og hop videre til den næste]

2) Bevis, at der findes mindst to blade i et træ, hvis træet har to eller flere knuder. [Vink: brug 1)]

1.3 Eulerture

Grafteoriens fødsel - historien om Königsberg

I 1736 blev Leonhard Euler bedt om at finde en rute gennem byen Königsberg, så en procession (et optog) kunne gå over samtlige 7 broer i byen præcis én gang (som I måske husker fra tidligere, er det definitionen af en ”tur”). Året efter udgav han en artikel, som analyserede, hvorvidt dette var muligt. Denne artikel betragtes som det første bidrag til grateorien [2]. Nedenfor på figur 1.7 ses et billede af Königsbergs broer, og hvordan dette kan repræsenteres med en graf.



Figur 1.7: *Venstre*: Tegning af Königsberg med broerne [3]. *Højre*: Königsberg repræsenteret ved en graf. Knuderne er de fire landområder, og kanterne er broerne mellem dem.

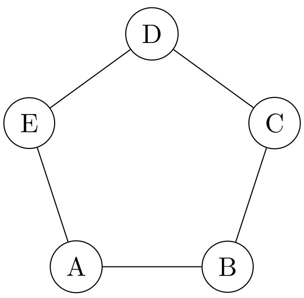
Åbne og lukkede Eulerture

Efter dette store bidrag til grafteorien har Euler naturligvis fået et begreb opkaldt efter sig:

Definition 1.3.1. En *Euler-tur* er en tur, som indeholder alle grafens kanter.
En Euler-tur kan enten være åben eller lukket. Her genbruger vi blot definition 1.2.4-(4):

- En lukket Euler-tur starter og slutter i samme knude.
- En åben Euler-tur starter og slutter i to forskellige knuder.

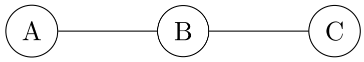
Eksempel 1.3.2. For et helt simpelt eksempel på en lukket Euler-tur kan vi se på kredsgrafen med 5 knuder igen:



For at lave en lukket Euler-tur kan vi vælge en vilkårlig knude at starte i. For eksempel kan vi starte i A. Vi kan nu gå turen $A \to B \to C \to D \to E \to A$. Da alle kanterne er med i turen netop én gang og vi har samme start- og slutknude, har vi altså lavet en lukket Euler-tur i grafen!

Overvej: Gælder det for alle kredsgrafer?

Eksempel 1.3.3. For et helt simpelt eksempel på en åben Euler-tur kan vi se på vejgrafen med 3 knuder P_3:



For at lave en åben Euler-tur skal vi vælge en knude at starte i med en smule omtanke. Vi skal nemlig starte og ende i en af endeknuderne for, at vi kan få alle kanter og knuder med. For eksempel kan vi starte i A. Vi kan nu gå turen $A \to B \to C$. Da alle kanterne er med i turen netop én gang, og vi har forskellige start- og slutknuder, har vi altså lavet en åben Euler-tur i grafen!

Nu har vi kun kigget på simple eksempler, men det er ikke svært at forestille sig meget store grafer med hundredevis af knuder og tusinder af kanter imellem sig. Hvordan kan vi finde ud af, om den har en Eulertur? Det siger denne sætning noget om:

Sætning 1.3.4. *Betragt en graf G uden isolerede knuder.*

1. *G har en lukket Eulertur, hvis og kun hvis den er sammenhængende og alle knuder har lige valens.*

2. *G har en åben Eulertur, hvis og kun hvis den er sammenhængende og har præcist to knuder med ulige valens.*

Bevis. For at bevise påstand 1, skal vi vise to ting. Første skal vi vise, at hvis G har en lukket Eulertur, er G sammenhængende, og alle knuder har lige valens. Dette overlades som en øvelse, se opgaverne. Dernæst skal vi vise, at hvis en graf G er sammenhængende, og alle knuder har lige valens, vil G have en lukket Eulertur. Denne implikation udelades, da den bygger på et induktionsargument, som rækker en del udover forløbets indhold. At bevise påstand 2 forløber på tilsvarende vis. ■

Opgaver til Eulerture

Vi konkluderede i eksempel 1.3.2, at alle kredsgrafer har lukkede Eulerture. I de næste to opgaver ser vi på de to andre typer af standardgrafer K_n (komplet graf) og P_n (vejgraf) og undersøger, om disse har Eulerture (åbne eller lukkede).

• **Opgave 1.3.1:**
[Vink: Tegn graferne!]

1) Har P_4 en Eulertur? Hvis ja, er den så åben eller lukket?

2) Har en vilkårlig vejgraf P_n en Euler-tur? Hvis ja, er den så åben eller lukket?

•• **Opgave 1.3.2:**
[Vink: Tegn graferne!]

1) Har K_4 en Eulertur? Hvis ja, er den så åben eller lukket?

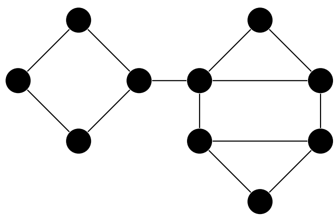
2) Har K_5 en Eulertur? Hvis ja, er den så åben eller lukket?

3) Har K_6 en Eulertur? Hvis ja, er den så åben eller lukket?

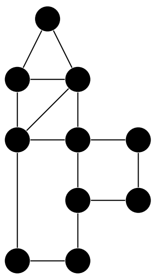
4) Hvilke komplette grafer har en Eulertur? Hvad skal der gælde om n? [Vink: se på valensen af en knude]

•• **Opgave 1.3.3:**
Denne opgave er fra [2]. Afgør om graferne har en lukket eller åben Eulertur, og find om muligt en.

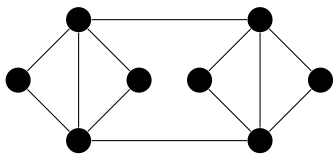
1)



2)

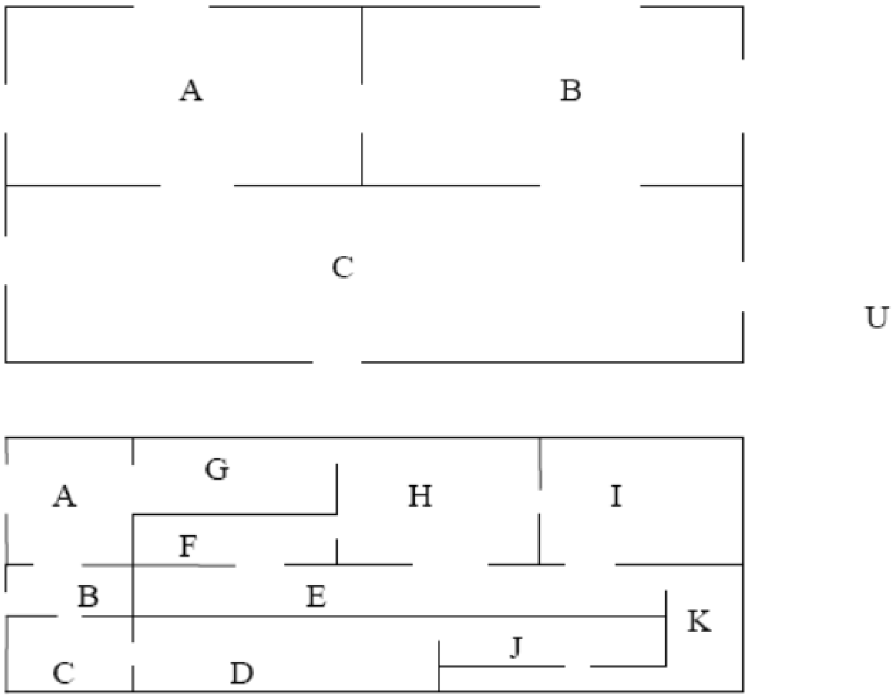


3)



•• **Opgave 1.3.4:**
Denne opgave er fra [2]. Herunder er tegnet en plan over to huse. Tegn passende grafer over begge huse, så rummene er knuder og dørene kanter (betragt haven U som et rum

i hvert hus). Afgør herefter, om det er muligt at gå en tur gennem huset, så man går gennem hver dør netop én gang.



Figur 1.8: Plan over de to huse.

●● **Opgave 1.3.5:**
Kan man finde en lukket Eulertur over broerne i Königsberg?

●● **Opgave 1.3.6:**
Kan man finde en åben Eulertur over broerne i Königsberg?

●●● **Opgave 1.3.7:**
Lad G være en graf med en lukket Eulertur.

1)Bevis, at G er sammenhængende.

2)Bevis, at alle knuder i G har lige valens.

●●● **Opgave 1.3.8:**
Lad G være en graf med en åben Eulertur.

1)Bevis, at G er sammenhængende.

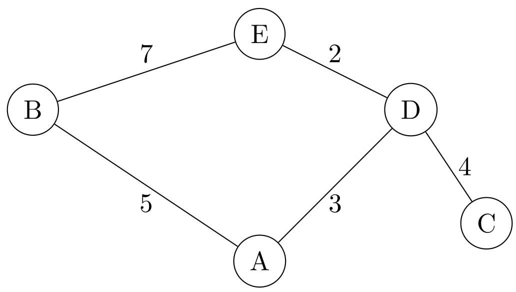
2)Bevis, at netop to knuder i G har ulige valens. [Vink: hvad skal gælde om valensen af de knuder, som turen starter og slutter i? Hvad med alle andre knuder?]

1.4 Vægtede grafer og grafalgoritmer

I dette afsnit udvider graf-begrebet og introducerer algoritmer. Hvad er en algoritme? Du har måske hørt en af datalogerne nævne ordet. En algoritme er blot en følge af instruktioner, der beskriver en proces præcist, hvor et givet input bliver til et bestemt output [4]. Så præcist, at man ofte kan få en computer til at udføre den. Algoritmer er meget vigtige både i matematik og datalogi, og studiet af dem udgør et særdeles nyttigt samspil mellem de to discipliner.

Vægtede grafer

En vægtet graf er blot en graf, hvor alle kanter har en værdi tilknyttet. Denne værdi kaldes en vægt. Et eksempel ses herunder:



Figur 1.9: En simpel vægtet graf

Man kan fortolke vægtede grafer som mange ting. Et eksempel kunne være steder og veje mellem disse. Vægtene kan her være afstande, omkostninger med mere. I virkeligheden vil man ofte være interesseret i at finde den korteste vej fra et sted til et andet. I grafteori kan dette omsættes til: Givet en vægtet graf G, find den rute fra knude A til knude B, hvor summen af vægten af kanterne i ruten er mindst mulig. Det er netop dette problem, som Djikstras algoritme løser (Djikstra udtales "deigstra"), hvis man lader alle vægtene være positive.

Lad os overveje en anden fortolkning af vægtede grafer. Forestil dig, at du har et netværk af f.eks. fabrikker, og du ønsker at bygge et netværk af veje mellem dem. Det skal være muligt at komme fra en vilkårlig fabrik til en hvilken som helst anden fabrik i netværket, men du ønsker ikke at lave så meget som én vej for meget. Vi kan lade samtlige muligheder for veje udgøre en sammenhængende graf G. Problemet svarer da til at finde et træ, der udspænder grafen, dvs. et træ, som indeholder de samme knuder som grafen. Sådan et træ kaldes et *udspændende træ*. Hvis G er en vægtet graf, og vi ydermere ønsker, at vægten af træet (dvs. summen af vægtene for alle kanterne i træet) skal være mindst muligt, kaldes det et *mindste udspændende træ*. Kruskals algoritme er én af mange algoritmer, der finder et mindste udspændende træ i en vægtet graf.

Djikstras algoritme og korteste veje

Nu gennemgås Djikstras (udtales *deigstra*) algoritme. For at algoritmen kan begynde, skal den have en startknude og en vægtet graf, hvor alle vægtene (kanternes værdier) er positive. Djikstras algoritme findes i flere udgaver. Den udgave, vi tager udgangspunkt i, giver den korteste afstand fra startknuden til alle andre knuder i grafen.

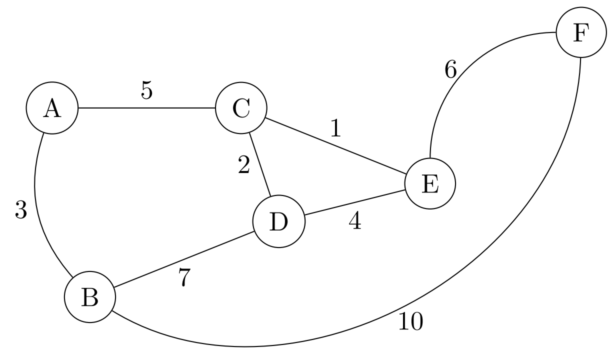
Djikstras algoritme

1. Vælg en startknude s, og sæt afstanden fra s til alle andre knuder til uendelig, ∞. Markér s som besøgt (en besøgt knude bliver aldrig besøgt igen).
2. Udregn afstanden fra s til den nuværende knudes naboer. Hvis afstanden er kortere end den tidligere noterede afstand, erstat den gamle afstand med den nye.
3. Udvælg knuden (der ikke nødvendigvis er en nabo til den nuværende knude) med kortest afstand til s og markér denne som besøgt. Denne knude bliver også den nye nuværende knude.
4. Gentag trin 2 og 3, indtil alle knuder er besøgt.

Bemærkning 1.4.1. Djikstras algoritme giver ikke selve vejen som output, kun længden af den korteste vej. Dog er det ofte let at aflæse selve vejen ud fra ens udregninger.

Det kan være noget af en mundfuld, når man støder på sådan en algoritme for første gang. Algoritmen forstås bedst gennem nogle eksempler. Vi tager et nu:

Eksempel 1.4.2. Betragt den vægtede graf:



Figur 1.10: En vægtet grad med 6 punkter.

Vi anvender Djikstras algoritme til at finde den korteste vej fra A til alle andre knuder. A er vores startknude, så den er implicit markeret som besøgt. Dette er første trin i algoritmen. Vi ser, at A er nabo til knude B og C med afstand 3 og 5. Vi skriver afstandene ned i et skema, hvor afstanden til A står under hver knude:

Nuværende knude	B	C	D	E	F
$A \to$	3	5	∞	∞	∞

B har kortest afstand til A. Vi markerer derfor B som besøgt. B har veje til D og F af længde 7 og 10. Vi kopierer disse oplysninger ind i skemaet:

Nuværende knude	B	C	D	E	F
$A \to$	3	5	∞	∞	∞
$B \to$	✓	5	$3+7$	∞	$3+10$

Husk, at tallene under knuderne er afstanden til A med den vej, vi har fundet! Det ses, at knude C har kortest afstand til A, så den fortsætter vi med. C har en vej til D

og E med længde 2 og 1. Den forrige vej til D havde længde $3 + 7 = 10$, men vi har fundet en ny vej med længde $5 + 2 = 7$. Vi skriver de nye oplysninger ind i skemaet:

Nuværende knude	B	C	D	E	F
$A \rightarrow$	3	5	∞	∞	∞
$B \rightarrow$	✓	5	$3+7$	∞	$3+10$
$C \rightarrow$		✓	$5+2$	$5+1$	13

Det ses, at E er knuden med kortest vej til A, som vi endnu ikke har besøgt. E har en vej til F med længde 6, så vi har fundet en kortere vej til F end før. Vi skriver oplysningerne ind:

Nuværende knude	B	C	D	E	F
$A \rightarrow$	3	5	∞	∞	∞
$B \rightarrow$	✓	5	$3+7$	∞	$3+10$
$C \rightarrow$		✓	$5+2$	$5+1$	13
$E \rightarrow$			7	✓	$6+6$

Vi ser, at D er den ikke-besøgte knude, der har kortest afstand til A. D har dog ingen naboer, vi endnu ikke har besøgt. Vi markerer derfor D som besøgt og hopper videre:

Nuværende knude	B	C	D	E	F
$A \rightarrow$	3	5	∞	∞	∞
$B \rightarrow$	✓	5	$3+7$	∞	$3+10$
$C \rightarrow$		✓	$5+2$	$5+1$	13
$E \rightarrow$			7	✓	$6+6$
$D \rightarrow$			✓		12

Der er kun F tilbage, som vi markerer som besøgt:

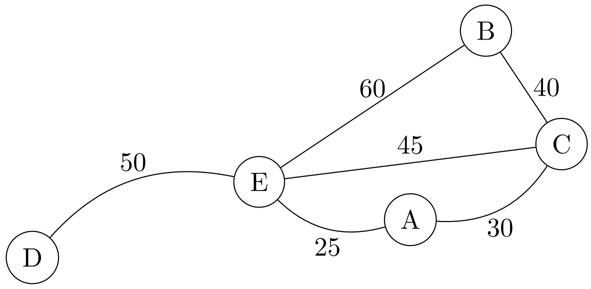
Nuværende knude	B	C	D	E	F
$A \rightarrow$	3	5	∞	∞	∞
$B \rightarrow$	✓	5	$3+7$	∞	$3+10$
$C \rightarrow$		✓	$5+2$	$5+1$	13
$E \rightarrow$			7	✓	$6+6$
$D \rightarrow$			✓		12
$F \rightarrow$					✓

Da der ikke er flere knuder tilbage at tjekke, er vi færdige! Vi aflæser de nederste værdier i skemaet under hver knude og får, at den korteste vej fra:

- A til B er 3
- A til C er 5
- A til D er 7
- A til E er 6
- A til F er 12

Lad os tage et andet eksempel, hvor hvert trin ikke gennemgås lige så grundigt som i forrige. Hvis du taber tråden undervejs, er det helt ok. Læs evt. forrige eksempel igen og se, hvor forståelsen glipper. Husk, at du altid kan spørge os!

Eksempel 1.4.3. Vi betragter den vægtede graf:



Figur 1.11: Endnu en vægtet graf.

Vi vil finde den korteste vej fra A til alle andre knuder. A har veje til C og E, og vi noterer afstandende i skemaet herunder:

Nuværende knude	B	C	D	E
$A \rightarrow$	∞	30	∞	25

E har kortest afstand til A, så den går vi videre med. E har veje til både B, C og D, hvor vejen til C er længere end den direkte vej fra A til C. Vi får derfor:

Nuværende knude	B	C	D	E
$A \rightarrow$	∞	30	∞	25
$E \rightarrow$	25 + 60	30	25 + 50	✓

C har kortest afstand til A, så den går vi videre med. C har en vej til B, der er kortere end den, vi fandt før. Vi får:

Nuværende knude	B	C	D	E
$A \rightarrow$	∞	30	∞	25
$E \rightarrow$	25 + 60	30	25 + 50	✓
$C \rightarrow$	30 + 40	✓	75	

B har kortest afstand til A, så den fortsætter vi med og får:

Nuværende knude	B	C	D	E
$A \rightarrow$	∞	30	∞	25
$E \rightarrow$	25 + 60	30	25 + 50	✓
$C \rightarrow$	30 + 40	✓	75	
$B \rightarrow$	✓		75	

Vi mangler kun at tjekke D, og vi får:

Nuværende knude	B	C	D	E
$A \rightarrow$	∞	30	∞	25
$E \rightarrow$	25 + 60	30	25 + 50	✓
$C \rightarrow$	30 + 40	✓	75	
$B \rightarrow$	✓		75	
$D \rightarrow$			✓	

Vi kan nu se ud fra skemaet, at den korteste vej fra:

- A til B er 70, nemlig ABC
- A til C er 30, nemlig AC
- A til D er 75, nemlig AED
- A til E er 25, nemlig AE

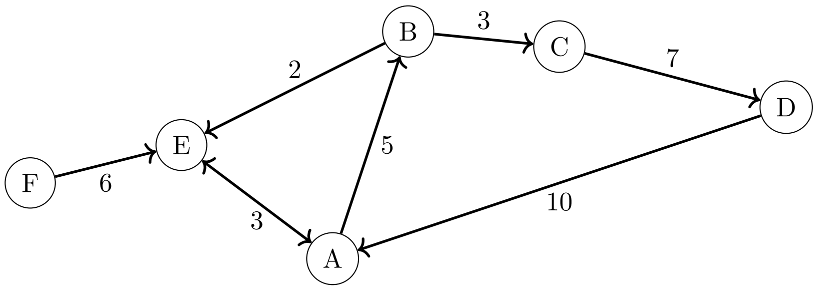
I starten af sektionen hævdede vi, at Djikstras algoritme altid giver den korteste vej i en vægtet graf med positive vægte. Dette er et resultat, vi fremhæver her (dog uden bevis):

Sætning 1.4.4. *Lad G være en vægtet graf, hvor alle vægte er positive, med en knude s. Djikstras algoritme giver den korteste vej fra s til alle andre knuder.*

Bevis. Beviset udelades, idet det er for langt til, at vi kan gennemgå det her. Et klassisk bevis, der benytter såkaldte løkke-invarianter, kan findes i [4]. ■

Bonus: Orienterede grafer

Vi har set, at man til en graf kan tilføje den ekstra egenskab, at hver kant har en vægt. Her tilføjer vi endnu en, nemlig at kanterne har en orientering (de peger i en bestemt retning). Når først I har fået styr på vægtede grafer, er dette emne ikke så svært. En orienteret graf er blot en graf, hvor kanterne har en retning. Herunder ses et eksempel:



Figur 1.12: Orienteret og vægtet graf

I mange byer vælger man at ensrette vejene, så trafikken glider lettere. Man kan tænke på knuderne som steder i byen og kanterne som veje. Hvad gør vi, hvis vi vil finde den korteste vej fra knude A til de andre knuder? Vi anvender selvfølgelig Djikstra's algoritme! Vi skal bare tage hensyn til vejenes retning. F.eks. kan vi gå direkte fra knude D til A, men ikke omvendt. Vejenes retning tvinger os til at tage en omvej. Bemærk desuden, at der ikke findes en vej fra A til F.

Eksempel 1.4.5. Vi finder den korteste vej fra A til alle andre knuder i grafen fra figur 1.12. Vi gør fuldstændig som i de tidligere eksempler og laver et skema. A har en vej til B og E:

Nuværende knude	B	C	D	E	F
$A \rightarrow$	5	∞	∞	3	∞

E har den korteste vej til A, så den fortsætter vi med. E har dog ingen veje til andre knuder, vi ikke allerede har besøgt, så vi får bare:

Nuværende knude	B	C	D	E	F
$A \rightarrow$	5	∞	∞	3	∞
$E \rightarrow$	5	∞	∞	✓	∞

B har den korteste vej til A, så den går vi videre med. B har veje til C og E, men E er allerede besøgt, så vi får:

Nuværende knude	B	C	D	E	F
$A \rightarrow$	5	∞	∞	3	∞
$E \rightarrow$	5	∞	∞	✓	∞
$B \rightarrow$	✓	$5+3$	∞		∞

C har kortest afstand til A, så den fortsætter vi med. C har en vej til D, og vi får:

Nuværende knude	B	C	D	E	F
$A \rightarrow$	5	∞	∞	3	∞
$E \rightarrow$	5	∞	∞	✓	∞
$B \rightarrow$	✓	$5+3$	∞		∞
$C \rightarrow$		✓	$8+7$		∞

Nu er vi faktisk færdige. D har kortest afstand til A af de ikke-besøgte knuder, men D har ingen naboer, vi ikke allerede har besøgt. Så er der kun F tilbage, men A har ingen vej til F, så afstanden fra A til F er ∞. Vi har altså:

Nuværende knude	B	C	D	E	F
$A \rightarrow$	5	∞	∞	3	∞
$E \rightarrow$	5	∞	∞	✓	∞
$B \rightarrow$	✓	$5+3$	∞		∞
$C \rightarrow$		✓	$8+7$		∞
$D \rightarrow$			✓		∞
$F \rightarrow$					✓

Og vi kan konkludere, at den korteste vej fra:

- A til B er 5, nemlig AB
- A til C er 8, nemlig ABC
- A til D er 15, nemlig $ABCD$
- A til E er 3, nemlig AE
- A til F er ∞, da der ikke findes en vej fra A til F

Kruskals algoritme og mindste udspændende træer

Her gennemgås Kruskals algoritme til at finde et mindste udspændende træ i en graf. Dette er det sidste emne i forløbet. Overordnet fungerer algoritmen ved at tilføje kanter efter lavest vægt én for én til et træ, der ender med at udspænde grafen. Proceduren er:

Kruskals algoritme

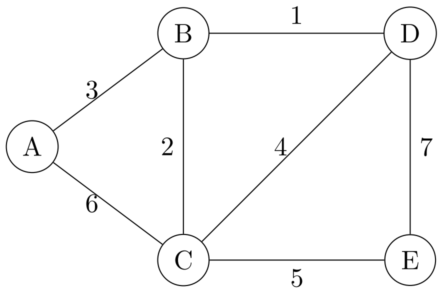
1. Sortér kanterne i grafen efter vægt fra mindst til størst. Har nogle af kanterne ens vægt, er rækkefølgen ligegyldig. Lad A betegne mængden (som i starten er tom) af de kanter, der skal være med i vores træ.

2. Kig på kanten med mindst vægt. Hvis tilføjelsen af kanten til A skaber en kreds i A, spring kanten over. Ellers tilføj kanten til A.

3. Gentag trin 2 for den næste kant i den sorterede liste af kanter, indtil alle kanter er blevet checket.

Vi tager naturligvis et eksempel:

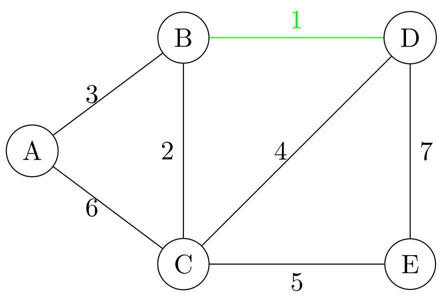
Eksempel 1.4.6. Betragt den vægtede graf:



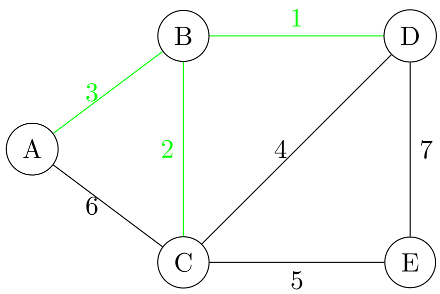
Figur 1.13: En vægtet graf med 5 knuder

Vi benytter Kruskals algoritme til at finde et mindste udspændende træ. Kanten, vi betragter i et givent trin, farves rød, mens kanterne, der tilføjes, farves grønne.

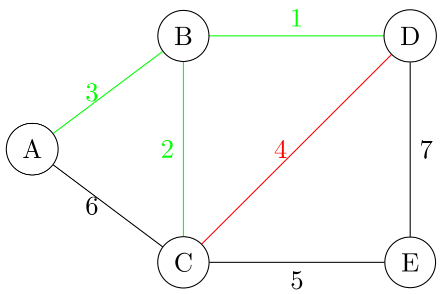
Kanten mellem B og D har mindst vægt, så den tilføjes til mængden A.



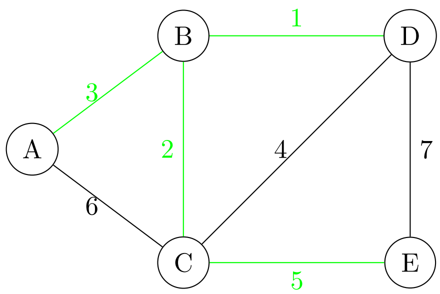
Den næste kant, vi ser på, er mellem B og C med vægt 2. Vi får ingen kreds ved at tilføje denne til A, så det gør vi. Det samme ser vi for kanten mellem A og B, så den tilføjer vi også og får:



Den næste kant er kanten mellem C og D:



Tilføjes denne kant, ser vi, at der opstår en kreds gennem B, C og D. Ergo tilføjer vi ikke denne kant. Herefter ser vi på kanten mellem C og E med vægt 5. Vi får ingen kreds ved at tilføje denne kant, så det gør vi:



Tilføjelsen af flere kanter giver en kreds, idet vi allerede har et udspændende træ. Ergo er vi færdige, og det mindste udspændende træ har en samlet vægt på $1+2+3+5 = 11$.

Vi konkluderer med følgende resultat:

Sætning 1.4.7. *Kruskals algoritme giver altid et mindste udspændende træ.*

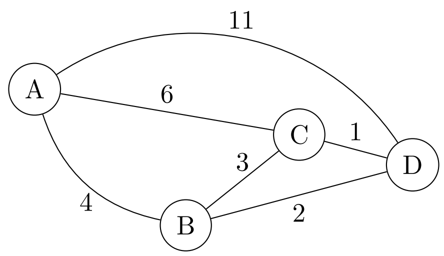
Bevis. Vi refererer til [4] for et bevis. ∎

Opgaver til vægtede grafer og grafalgoritmer

Opgave 1.4.1 til 1.4.10 omhandler Djikstra's algoritme og korteste veje, mens de resterende omhandler Kruskals algoritme og mindste udspændende træer.

• **Opgave 1.4.1:**

1) Brug Djikstra's algoritme til at finde længden af den korteste vej fra A til D i følgende graf:



og bestem selve den korteste vej.

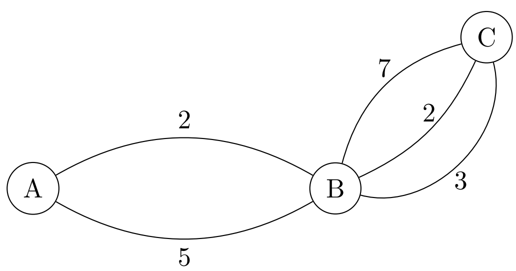
2) Bestem selve de korteste veje fra A til alle andre knuder i grafen fra eksempel 1.4.2.

• **Opgave 1.4.2:**

Giv et eksempel på en vægtet graf, hvor den korteste vej mellem to knuder ikke er entydig, altså der er flere forskellige korteste veje. Vælg din yndlingsknude og anvend Djikstra's algoritme på din graf.

• **Opgave 1.4.3:**

I denne opgave skal I overveje, hvad vi skal gøre mht. Djikstra's algoritme, hvis en graf har to eller flere veje mellem to knuder, f.eks.:



1) Når vi skal finde korteste veje, hvorfor kan vi så bare antage, at en vægtet graf kun har én vej mellem to naboknuder?

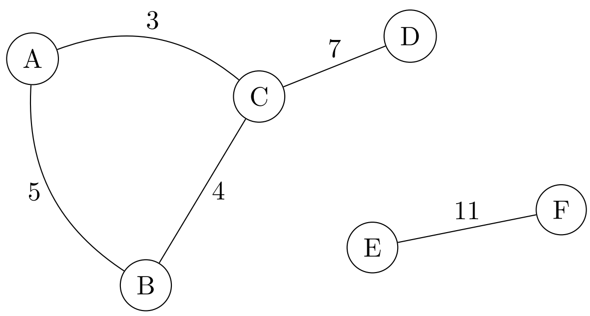
2) Hvad gør vi, hvis en graf har knuder med løkker?

3) Hvorfor kan vi uden problemer antage i dette afsnit, at alle grafer er simple, idet vi ønsker at bestemme korteste veje?

•• **Opgave 1.4.4:**

1) Kan vi stadig bruge Djikstra's algoritme på en ikke-sammenhængende graf? Og i så fald, hvordan?

2) Se grafen herunder:

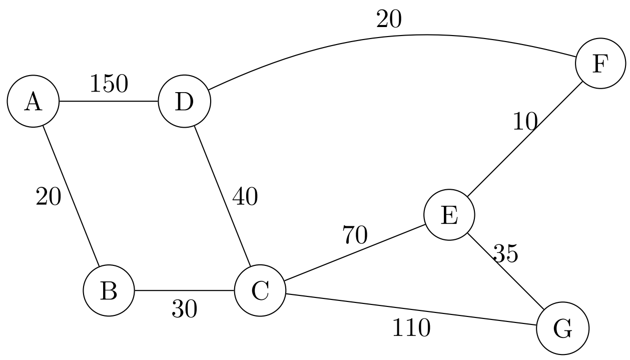


Med overvejelserne fra 1) i tankerne, hvad er den korteste afstand fra A til F?

3)Overvej til slut, hvorfor vi mon sætter afstanden fra startknuden til de andre knuder til uendelig ∞ i starten af algoritmen.

●● Opgave 1.4.5:

Superman befinder sig i by A og har hørt, at der er problemer i by G. Godt nok flyver Superman hurtigt, men han vil stadig gerne tilbagelægge så kort en afstand som muligt. Heldigvis kender Superman alle ruter mellem byerne. Ud fra følgende graf, find længden af den korteste vej fra A til G samt selve vejen:



●● Opgave 1.4.6:

Tegn en vægtet graf, hvor Djikstra's algoritme **ikke** giver den korteste vej.

●●● Opgave 1.4.7:

1)Antag, at vi arbejder med en vægtet graf, hvor alle vægte er positive eller 0. Bevis, at en korteste vej ikke kan indeholde en kreds, medmindre kredsens samlede vægt er 0 (så alle kanter i kredsen har vægt 0).

2)Tegn en sammenhængende vægtet graf (ikke nødvendigvis positive vægte), hvor en korteste vej mellem to knuder ikke eksisterer. [Vink: kan du tegne en graf, hvor man kan gøre afstanden mellem to knuder arbitrært lille?]

●●● Opgave 1.4.8:

Bevis følgende påstande for en vægtet graf med positive vægte, G, hvori A og B er knuder (du må ikke benytte Djikstra's algoritme i dit argument!):

1)Hvis der findes en vej fra A til B, findes også en kortest mulig vej fra A til B. [Vink: brug forrige opgave!]

2)Antag, at den korteste vej fra A til B går gennem en knude C. Da er den del af vejen fra A til B, som går mellem A og C, den korteste vej fra A til C. Med andre ord: korteste veje er opbygget af korteste veje.

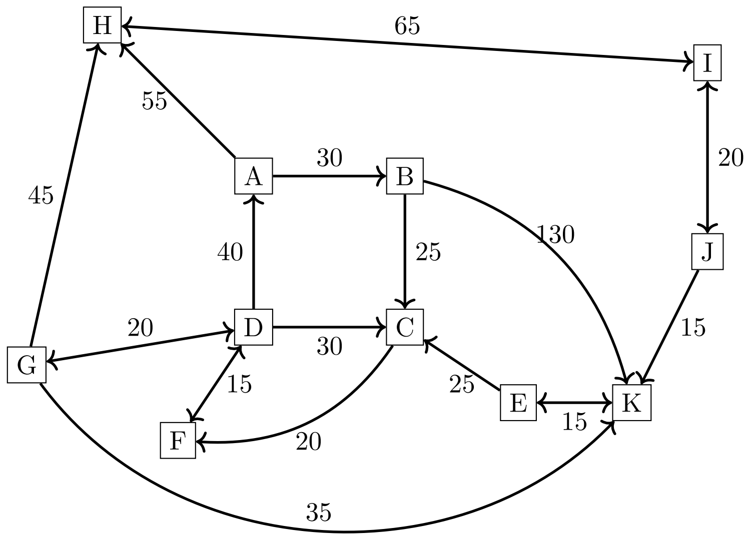
Note: Delopgave 2) viser, at problemet med at finde korteste veje i en vægtet graf med positive vægte har såkaldt *optimal delstruktur*. Det betyder, at en optimal løsning til problemet består af optimale løsninger til delproblemer.

Opgave 1.4.9:

Tegn selv en vægtet graf og find længden af den korteste vej mellem din yndlingsknude og alle andre knuder.

Opgave 1.4.10:

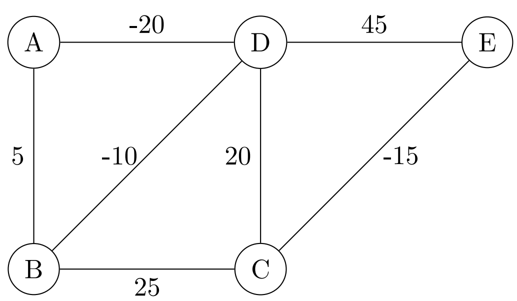
Batman sidder i Batmobilen ved boligblok A, idet han hører, at der er et røveri i gang ved boligblok K. Hans GPS giver ham følgende graf, der viser de mulige veje dertil:



Bemærk, at en del af vejene er ensrettede! Hvad er længden af den korteste vej fra Batmans position til røverne? Og hvad er selve den korteste vej?

Opgave 1.4.11:

1)Find et mindste udspændende træ i følgende graf:



Hvad er den minimale vægt for et udspændende træ?

2)Hvis vægten af kanten fra C til D ændres til 30, er dit udspændende træ fra opgave 1) stadig et mindste udspændende træ?

• **Opgave 1.4.12:**

Tegn en vægtet graf med mindst 6 knuder og 9 kanter, hvor der findes mere end ét mindste udspændende træ.

• **Opgave 1.4.13:**

Hvis vi dropper kravet om at sortere kanterne efter vægt i starten af Kruskals algoritme og blot betragter dem i en vilkårlig rækkefølge, får vi så stadig altid et mindste udspændende træ, når algoritmen terminerer?

•• **Opgave 1.4.14:**

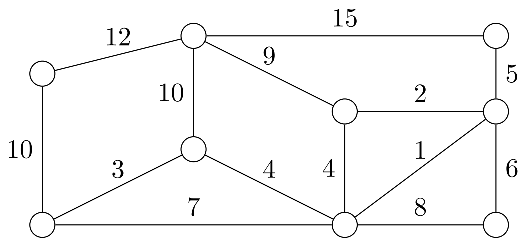
Lad A udgøre en samling af kanter i en vægtet graf G, der forbinder samtlige knuder i G og som har minimal samlet vægt.

1)Bevis, at hvis alle kanter i G har positiv vægt, er A nødvendigvis et træ.

2)Gælder det samme, hvis vi tillader kanterne i G at have negativ vægt? Giv enten et bevis eller et modeksempel.

•• **Opgave 1.4.15:**

Du er ansat på en fabrik, der fremstiller elektroniske komponenter. Du får udleveret følgende skitse af en chip:



Figur 1.14: En skitse af chippen

Kanterne skal her forstås som mulige forbindelser, der kan laves med kobbertråd. Vægtene er længden mellem knuderne (jo længere, jo mere kobber skal der bruges for at lave den forbindelse). Fabrikken vil have, at alle punkter på chippen skal indgå i ét netværk. Find sådan et netværk, hvor der skal bruges så lidt kobber som muligt. Hvor meget kobber skal der bruges i netværket?

••• **Opgave 1.4.16:**

Lad G være en sammenhængende vægtet graf med en kant e. Antag, at e indgår i en kreds og har maksimal vægt af alle kanterne i kredsen. Bevis, at der eksisterer et mindste udspændende træ, der ikke indeholder e.

••• **Opgave 1.4.17:**

Lad G være en sammenhængende vægtet graf med naboknuder A og B. Antag, at kanten fra A til B har minimal vægt blandt kanterne i grafen. Bevis, at denne kant vil tilhøre et mindste udspændende træ for G.

1.5 Konklusion

Hvad gør vi så herfra? Det grafteori, I har arbejdet med, er kun en brøkdel af det samlede billede. Der er utroligt mange områder at udforske i grafteori, f.eks. kom vi slet ikke ind på farvelægning af grafer, Hamilton-ture, permutationer eller kombinatorik. Det viser bare, hvor meget matematiske koncepter kan udvikle sig langt ud over den oprindelige problemstilling. Euler var uden tvivl genial, men selv han ville nok ikke være i stand til at se, hvor meget grafteori ville vokse som matematisk felt, og hvor mange problemer vi i dag kan løse ved at bruge grafteori.

Kapitel 2

Fysik

2.1 Introduktion

I dette kapitel vil vi forsøge at introducere læseren til noget af den fysik, man møder i gymnasiet, og samtidig gøre det klart, hvad det er, der gør fysik til noget særligt inden for naturvidenskab. Fokus vil være på det mere konceptuelle, for ikke at forvirre læseren med unødvendige matematiske krøller og regler. Ønsker man alligevel en dybere gennemgang af fysikken gennem matematikken, kan man blot spørge underviserne.

På denne camp vil vi i fysik arbejde med et overordnet begreb man kalder *bevarede størrelser*. En bevaret størrelse er netop kendetegnet ved, at den i et givet system er bevaret. Det vil sige, at kigger du på et afgrænset område med en opstilling, også kaldet dit "system", så ændrer den bevarede størrelse sig ikke, uanset hvad der sker. En bevaret størrelse er nyttig for fysikere, idet vi kan bruge den til at udregne, hvordan et system vil opføre sig. For eksempel kan vi bruge den bevarede størrelse kendt som *impuls* til at beregne bevægelserne af nogle billiard kugler på et bord. De to bevarede størrelser vi skal arbejde med her er netop *impuls* og også *energi*.

Hvis du synes, at det lød lidt kringlet, så fortvivl ej. I fysik kan vi godt lide at finde ind til de mest generelle og grundliggende principper, der ligger bag de fænomener vi kan observere, så formuleringerne kan godt komme til at virke lidt abstrakte. I dette kapitel vil vi forsøge at tage dig i hånden, og føre dig fra noget konkret og håndgribeligt over i de mere generelle fysiske principper bag.

2.2 Matematik

Ligesom i alle andre naturvidenskaber, spiller matematik en vigtig rolle i fysikken. Matematik er både det sprog vi bruger til at kommunikere fysiske sammenhænge, og samtidig et værktøj vi bruger til at løse problemer. I dette kapitel forudsætter vi derfor, at læseren er bekendt med algebraisk manipulation til løsning af simple ligninger. Hvis du ikke er helt sikker på hvad det betyder, så kig på kapitlet om matematik.

Algebra

Ligninger slipper man ikke uden om i fysikken, det kan være I har lært at løse en ligning før, men vi vil her give en kort forklaring. En fundamental regel er, at det du gør mod et element i din ligning, det gør du mod alle elementer i din ligning. Det kan forståes som, hvis du har ligeså mange lektier som din klassekammerat, og I begge får 1 lektie mere for, så gælder ligningen for jeres mængde af lektier stadig, da I stadig har lige mange lektier for. Det kunne også være, at I begge klarede halvdelen af jeres lektier, så gælder ligningen stadig. Men hvis du kun klarer halvdelen af dine lektier, eller din klassekammerat får flere (ekstra) lektier for, så gælder ligningen ikke, da I så ikke længere har lige mange lektier for. I mange matematiske tilfælde beskriver vi *lektier*, eller hvad det nu er for en størrelse vi er interesseret i, med et x. Man vælger ofte x, da x kan betegne hvad som helst, f.x. lektier. Vi gengiver "*lektie ligningerne*" nedenunder, hvor x er mængden af lektier, som du startede med, og y er mængden af lektier, som din kammerat startede med. Hver side af lighedtegnet angiver, hvor mange lektier I hver især har nu.

I starter begge ud med den samme mængde lektier, men vi skriver dem her med symbolerne x og y:

$$x = y \tag{2.1}$$

I er hver især startet ud med x og y og I har begge fået en lektie mere, så nu har I følgende mængde lektier:

$$x + 1 = y + 1 \tag{2.2}$$

Er I hver især startet ud med x og y, og I har begge lavet halvdelen af jeres lektier, kan det skrives således:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} \tag{2.3}$$

Hvis vi indsætter og siger, at $x = 1$ i den første ligning, og alle de andre, så skulle vi finde, at y har samme værdi i alle andre ligning som i den første, da vi startede med at antage, at I havde fået den samme mængde lektier for:

$$1 = y \tag{2.4}$$

Her skriver vi, at y er 1, da vi indsatte $x = 1$ i $x = y$, derfor må y også være lig med 1 i de resterende ligninger.

Vi skulle gerne få samme resultat, når vi kigger på alle ligningerne som vi har gennemgået. Lad os derfor se på den anden ligning som vi gennemgik. I starter begge ud med x og y, og I har begge fået 1 lektie mere:

$$1 + 1 = y + 1 = 2 \tag{2.5}$$

Her får vi så en ny ligning $y + 1 = 2$, men hvis vi trækker 1 fra på begge sider, så må vi kunne finde ud af, hvad y er. Hvis vi formindsker begge sider med 1, så må de stadig være lige store, $20 = 20$ og $20 - 1 = 20 - 1 = 19$ har begge det samme stående på hver side af deres lighedstegn. Altså; 20 er ikke det samme som $20 - 1$, men $20 - 1$ er det samme som $20 - 1$. Trækker vi nu 1 fra på begge sider af ligningen:

$$y + 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \tag{2.6}$$

Så får vi at $y = 1$, fordi $y+1-1 = y+0 = y$, da $+1$ og -1 går ud med hinanden og giver 0.

Vi ser nu på ligningen, hvor I begge har lavet halvdelen:

$$\frac{1}{2} = \frac{y}{2} \tag{2.7}$$

Her bliver vi nødt til at gange med 2 på begge sider, det må vi igen godt, fordi fordobler vi begge sider, så må begge sider stadig være lige store. For eksempel så har $20 = 20$ og $20 \cdot 2 = 20 \cdot 2 = 40$ begge det samme stående på hver side af deres lighedstegn, ligesom tidligere, hvor vi trak det samme fra på begge sider.

$$\frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{y}{2} \cdot 2 = 1 = y \tag{2.8}$$

Så vi får altså igen, at $y = 1$, fordi $\frac{y}{2} \cdot 2 = y \cdot \frac{2}{2} = y \cdot 1$, da 2 halve giver 1 hel. Vi bemærker kort at alle regnerglerne også virker, hvis x og y ikke er lig med hinanden, som hvis du eller din ven gik i en klasse med ekstra lektier.

Nu antager vi, at du starter ud med x lektier, og du har 1 lektie mere end din kammerat, der starter ud med y lektier. Dette kan udtrykkes i en ligning som denne:

$$x = y + 1 \tag{2.9}$$

Har vi så, at du får $x = 3$ lektier for, så må din kammerat få $y = 2$ lektier for, da $3 = 2+1$.

Forestil dig, at du får x lektier for, og du har en mindre søskende i en mindre klasse, hvor de får y lektier for, der er halvt så mange lektier, som du får:

$$x = y \cdot 2 \tag{2.10}$$

Nu kan vi prøve at sætte 2 ind som x og prøve at finde y:

$$2 = y \cdot 2 \tag{2.11}$$

Dette giver:

$$y \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = y \cdot \frac{2}{2} = 1 \tag{2.12}$$

Vi får altså, at din mindre søskende har 1 lektie for, hvis du har 2 og generelt bare dobbelt så mange som du har.

Konklusionen du kan tage fra det her er, at hvis du gerne vil isolere noget (det er det, vi kalder når vi får noget til at stå alene, så for eksempel i udtrykket $x = y + 1$ er x isoleret), ligesom vi har gjort for at finde y, så skal du bare "anti"-gøre det, der påvirker den. I tabel 2.1 kan I se de forskellige regnetegn og deres modsætninger. Hvis du f.x. har et tal benævnt a, som du gerne vil fjerne fra den ene side i en ligning, f.x. i $x = y + a$, så skal du bare finde ud af, hvad den modsatte operation til + er, og her ville det være at trække fra, så $x - a = y + a - a = y$. Vi kan også prøve at indsætte $a = 1$ og se, at det passer $x - 1 = y + 1 - 1 = y$.

Tabel 2.1: Regneværktøjer og deres modsætning

Regneværktøj	Regnetegn	Modsætning	Anti-regnetegn
Lægge til	$a + b$	Trække fra	$a - b$
Gange	$a \cdot b$	Dividere	$\frac{a}{b}$
2. Potens	a^2	Kvadratrod	$\sqrt{a}$

Man skal bare huske, at gør du noget ved én ting, skal du gøre det ved alle ting, hvis du ligger 1 til på den ene side af lighedstegnet, så gør du også det på den anden side af lighedstegnet.

Hvis du fordobler et led, så gør du det på alle led, (her er et led bare tal ganget sammen og led på samme side af et lighedstegn er adskilt af + eller −, så $2 \cdot 3$ eller $x \cdot y$ er hver et led, men $2 \cdot 3 + x \cdot y \cdot z$ er to led og $1 \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot 4 + x \cdot y$ er tre led, da det er tre forskellige ting, der hver for sig er ganget sammen, som lægges sammen. Dette er illustreret i følgende ligning:

$$\underbrace{1 \cdot 2}_{\text{1. led}} = \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 4}_{\text{2. led}} + \underbrace{x \cdot y}_{\text{3. led}}$$

Se på det som, at du har 4 forskellige bunker, der har en eller anden samlet vægt, og hver bunke har sit materiale f.x. stål, pap, plast og træ. Den samlede vægt er altså:

$$\text{total} = \text{stål} + \text{pap} + \text{plast} + \text{træ}$$

Skal du fordoble den samlede vægt, så skal du fordoble vægten af dem alle sammen:

$$2 \cdot \text{total} = 2 \cdot \text{stål} + 2 \cdot \text{pap} + 2 \cdot \text{plast} + 2 \cdot \text{træ}$$

Vi kan ikke bare fordoble stål og sige, at den samlede vægt er fordoblet, da de hver især giver deres eget tillæg til den samlede vægt.

For at simplificere den formel, så vil vi bruge en parentes altså "()", det gøres således:

$$2 \cdot \text{total} = 2 \cdot (\text{stål} + \text{pap} + \text{plast} + \text{træ})$$

Parentesen siger at indholdet inden i den skal regnes først. I dette tilfælde kan man så enten gange det, der står udenfor parentesen ind, i dette tilfælde 2 tallet, på alle ledene indeni parentesen, så får vi:

$$2 \cdot (\text{stål} + \text{pap} + \text{plast} + \text{træ}) = 2 \cdot \text{stål} + 2 \cdot \text{pap} + 2 \cdot \text{plast} + 2 \cdot \text{træ}$$

ELLER man kan lægge stål sammen med de andre bunker først og så gange med 2. Dette er dog svært at illustrere med dette eksempel, da det ikke rigtig giver mening at lægge f.x. stål og træ sammen.

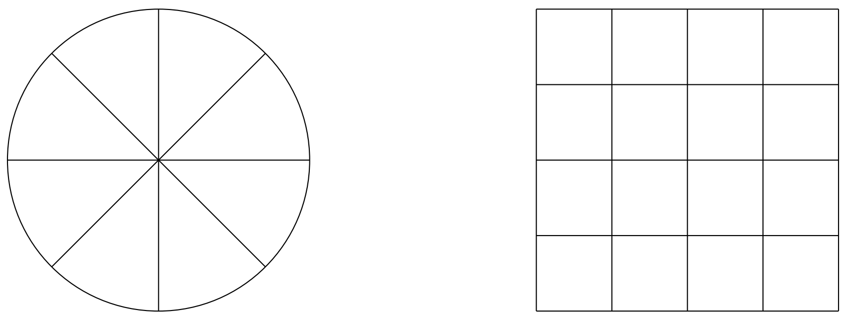
Set på samme eksempel men med penge, så om du får det dobbelte af 100 kr. og så får det dobbelte af 150 kr., eller om du får 100 kr. og 150 kr. og så får fordoblet, hvad du har lige har fået, så giver det samme resultat:

$$\begin{aligned}(100 + 150) \cdot 2 &= 100 \cdot 2 + 150 \cdot 2 = 200 + 300 = 500\\ (100 + 150) \cdot 2 &= (250) \cdot 2 = 500\end{aligned}$$

Brug af parenteser er noget, som vi gør meget brug af i fysikken, fordi det gør, så vi kan gøre formler simplere, f.x. med vores bunker, så ville vi ikke behøve at skrive gange 2 hele tiden, men kun én gang.

Regneregler for brøker og potenser

I dette afsnit vil der blive gennemgået forskellige regneregler, der ofte bliver brugt, når man løser forskellige ligninger i fysik. Der vil kort blive gennemgået, hvad brøker og potenser er, og hvordan man regner med dem. Til sidst i afsnittet vil regnereglerne være skrevet op på en generel form, selvom regnereglerne vil blive udledt ved brug af specifikke tal.



Figur 2.1: Repræsentation af brøker.

På figur 2.1 kan I se nogle figurer, der er delt op i mindre dele. Det er i princippet det, som vi gør med brøker. Vi har mindre dele af en hel enhed. For eksempel er et klassisk eksempel en halv eller $\frac{1}{2}$, men hvis man har to halve, altså $\frac{2}{2} = 1$, kan man konstater, at to halvdele giver en hel.

Dette virker ikke kun med halve, det gælder ligemeget hvor mange dele, som du vælger at inddele din enhed i. Har du har alle de mindre dele, så har du også den hele. Vores eksempel med to halve, gælder altså for alle tal, om det er halvfjerds eller 30 millioner, så halvfjerds halvfjerdsindstyvendedele er en hel, det samme skrevet med matematik er: $\frac{70}{70} = 1$.

Det er sådan, vi ofte arbejder med brøker, vi vil gerne have tingene giver 1, fordi så går de ud, eller rettere er ligegyldige, det betyder nemlig ikke så meget, hvis vi ganger med 1, fx. $1 \cdot 2 = 2$, vi kan altså bare skrive 2 i stedet for regnestykket. Der findes et tal, som vi ikke kan have dele af, det er 0, derfor er det påkrævet at det nederste i brøken ikke er nul

- **Opgave 2.2.1: Næ-nej, det må man ikke!** Prøv at tænke dig til, hvad man får, hvis man dividerer med 0.

Vi kan dog have en situation, hvor vi ganger brøker sammen, fx. en halv gange en halv eller halvdelen af en halv $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, halvdelen af en halvdel er en fjerdel, altså $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, det får vi ved at *gange lige over*, altså $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$. Det gælder selvfølgelig også for alle andre tal, bare vi husker vores regel med ikke at dividere med nul! Det modsatte kan også gøres, at *dividere* med brøker, hvilket kan være bøvlet nogle gange, men man gør i realiteten det samme. fx. $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$, her ved vi jo svaret er 1, da det er et tal divideret med sig selv. men i realiteten står der jo faktisk $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}}$, hvilket vi kan regne med den forrige regel som $= \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{2}{2}} = \frac{1}{1} = 1$ og minsandten så gav det 1.

Men vi kan også se det på en anden måde, hvor vi i stedet flytter rundt på den nederste del af brøken. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}}$, hvis vi halverer hvad *heleheden* er, så må vi have en dobbelt så stor del af helheden, altså hvis du nåede 1 ud af de 2 ting du skulle, har du $\frac{1}{2} = 0,5$, men hvis du kun skulle klare halvdelen altså 1, så $\frac{1}{\frac{2}{2}} = \frac{1}{1} = 1$, så har du nået det dobbelte af hvad du skulle opnå, ift. hvad du havde før. Det hænger altså sådan sammen, at hvis du dividerer den nederste del af brøken med noget, så kan du også bare gange med det samme, i vores tilfælde $\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Igen gælder dette for alle tal, så længe vi ikke dividerer med 0. Regnemåden kan også huskes på, at man skal *gange omvendt*, ift. når vi ganger brøkerne *lige over*. Du ganger altså toppen på den ene med bunden på den anden og bunden af den ene med toppen af den anden. Dette gjorde vi her, med ved at gange toppen 1 med bunden af det den bliver divideret med '$\frac{1}{2}$', altså 2, og bunden bliver ganget med 1. Skrevet på matematik-sprog:

$$\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1 \tag{2.13}$$

Så kan vi også have brøker, der lægges sammen, fx. to halve, som vi ved giver 1, det gør man matematisk således: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$, man lægger altså bare *delene* sammen. Det gælder dog kun hvis det er med ens bunde. fx:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \neq \frac{1+1}{2}, \neq \frac{1+1}{4} \tag{2.14}$$

Her er vi nødt til at gøre så vi har ens nævnere, det gør vi ved at forlænge de to brøker, fx $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4}$ Vi får i vores eksempel i ligning ligning (2.14):

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{5}{8} \tag{2.15}$$

Nogle gange kan vi have at bunden er beskrevet ved en sum, fx. $\frac{1}{-1+1}$, den brøk må vi ikke have, da vi dividere med 0 altså $\frac{1}{-1+1} = \frac{1}{0}$, så selvom der ikke direkte står 0, så kan det stadig være *ulovligt*, så hvis vi har en vilkårlig brøk $\frac{a}{b+c}$, så må det gælde at $b + c \neq 0$, fordi ellers er brøken *ulovlig*!

Nogle gange er det nyttigt at kunne gange det samme tal med sig selv flere gange. For eksempel kan man ønske sig at skulle gange 2 med sig selv 4 gange: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Dette kan dog skrives på en nemmere måde ved at bruge potenser:

$$2^4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4} = 16$$

På denne måde er det muligt at skrive nogle udtryk på en mere kompakt form:

$$2^4 = 16$$

Her kaldes tallet 2^4 for en potens, så når vi snakker om at opskrive en potens, så mener vi at opskrive et tal på den måde. I dette tilfælde kaldes tallet 2, der er farvet blåt, for *grundtallet* og tallet 4, der er farvet rødt, kaldes for *eksponenten*.

Der skal nu undersøges, hvad der sker, når forskellige udtryk med potenser kombineres, og i slutningen af dette afsnit vil regnereglerne være skrevet op på en generel måde.

Hvad sker der for eksempel, når hele den forrige ligning opløftes i tredje?

$$(2^4)^3 = \overbrace{\underbrace{(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)}_{4}\cdot\underbrace{(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)}_{4}\cdot\underbrace{(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)}_{4}}^{3\cdot 4=12} = 2^{12} = 2^{4\cdot 3}$$

Det kan således ses, at opløftes en potens med en eksponent, så ganges eksponenterne sammen.

Hvad sker der mon, når to potenser med samme grundtal men forskellige eksponenter divideres med hinanden?

$$\frac{2^5}{2^2} = \frac{\overbrace{(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)}^{5}}{\underbrace{(2\cdot 2)}_{2}} = \overbrace{(2\cdot 2\cdot 2)}^{3} = 2^3 = 2^{5-2}$$

Det kan således ses, at divideres to potenser med samme grundtal så fratrækkes eksponenten fra potensen i nævneren fra potensen i tælleren.

Er det derimod to potenser med forskelligt grundtal men samme eksponent, der divideres med hinanden gælder følgende:

$$\frac{2^3}{5^3} = \frac{\overbrace{(2\cdot 2\cdot 2)}^{3}}{\underbrace{(5\cdot 5\cdot 5)}_{3}} = \underbrace{\left(\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\right)}_{3} = \left(\frac{2}{5}\right)^3$$

I dette tilfælde kan hele brøken sættes som grundtal og den fælles eksponent som den nye eksponent.

Er det nu to potenser med forskelligt grundtal og samme eksponent, der ganges med hinanden sker følgende:

$$2^3\cdot 5^3 = \underbrace{(2\cdot 2\cdot 2)}_{3}\cdot\underbrace{(5\cdot 5\cdot 5)}_{3} = \underbrace{(2\cdot 5)\cdot(2\cdot 5)\cdot(2\cdot 5)}_{3} = (2\cdot 5)^3$$

Produktet af de to grundtal bliver således det nye grundtal opløftet i den gamle eksponent.

Ganges to potenser med samme grundtal sker følgende:

$$2^3\cdot 2^2 = \underbrace{(2\cdot 2\cdot 2)}_{3}\cdot\underbrace{(2\cdot 2)}_{2} = \underbrace{(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)}_{5} = 2^5 = 2^{3+2}$$

Grundtallet forbliver således det samme, og den nye eksponent bliver summen af de to eksponenter.

De regneregler, der er blevet gennem gået i dette kapitel, står her til sidst på en mere generel måde[5], hvor bogstaverne a, b, c og d kan være forskellige tal, medmindre andet er angivet. For eksempel kan man i ligning (2.16) bruge $a = 3$, $b = 9$ og $c = -5$, hvilket giver $3\cdot 9/(-5) = 27/(-5)$.

Brøkregneregler:

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}, \quad c \neq 0 \tag{2.16}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad b \neq 0, d \neq 0 \tag{2.17}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}, \quad b \neq 0, c \neq 0 \tag{2.18}$$

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}, \quad b \neq 0 \tag{2.19}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \quad b \neq 0, c \neq 0 \tag{2.20}$$

$$\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}, \quad c \neq 0, a \neq 0 \tag{2.21}$$

Potensregneregler:

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}, \quad a > 0 \tag{2.22}$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad a \neq 0 \tag{2.23}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0 \tag{2.24}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0 \tag{2.25}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \tag{2.26}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{2.27}$$

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0 \tag{2.28}$$

2.3 Bevægelse i 1 dimension

Før vi kan forstå impuls og energi, er det en god ide at forstå, hvordan ting bevæger sig. I fysik skelner vi mellem bevægelse i 1, 2 og 3 dimensioner, så lad os først prøve at forstå begrebet *dimension*.

Dimensioner

Du har måske hørt, at vi bor i en tredimensional verden[1], men hvad vil det egentlig sige? Det betyder, at vi kan skelne mellem tre forskellige vinkelrette linjer i rummet; op/ned, højre/venstre og frem/tilbage.

• **Opgave 2.3.1:** Prøv at tænke dig til en fjerde linje, der er vinkelret på de tre andre.

Du skulle gerne nå frem til, at opgave 2.3.1 ikke kan lade sig gøre. Det er derfor vi siger, at vi bor i en tredimensional verden[2]. I dette kapitel vil vi for nemhedens skyld holde os til at arbejde med én dimension. Det vil sige, at alting foregår på den samme linje, eller sagt på en anden måde, så er der kun to retninger man kan gå, nemlig frem og tilbage. Altså vil den rummelige verden vi arbejder med fra nu af, bestå af en enkelt linje.

Position, hastighed og fart

Du har måske en intuitiv forståelse for, hvordan bevægelse ser ud, så lad os nu sætte lidt matematik og nogle begreber på denne intuition. Her er det vigtigt at have tre begreber

[1]Med det mener vi 3 rummelige dimensioner. Derudover har vi en tidslig dimension, men den skiller sig lidt ud fra de andre. Hvis du vil vide mere om dette, så find en god bog om speciel relativitetsteori

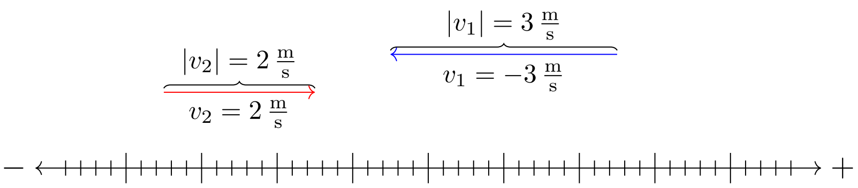
[2]Mere formelt kan man sige at der er tre *lineært uafhængige* retninger

på plads. Det første er *position*. Dette er, hvor et givet objekt er henne i rummet. Når vi arbejder med 1 dimension, er positionen derfor angivet af bare et enkelt tal, altså hvor langt henne af linjen, man er. Generelt er position en vektor, mere om dette i det følgende.

Det andet, vi skal kende til, er *hastighed*. Dette er, hvor hurtigt positionen af et objekt ændrer sig. For eksempel kunne et objekt have en hastighed på $5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ mod nord. Grunden til, at jeg angav en retning, er, at hastighed er en vektor. Du behøver ikke vide særlig meget om vektorer for at forstå det følgende, bare tænkt på vektorer som tal med en retning eller en pil med en længde og en retning. Når vi arbejder i én dimension, er retningen angivet af fortegnet på hastigheden, for eksempel kunne minus betyde tilbage, og plus fremad.

Fart hænger sammen med hastighed, og det er en hyppig fejl, at man bytter om på dem. Fart er *længden* af hastighedsvektoren, da hastigheden jo er givet ved en vektor, og modsat hastigheden er farten ikke en vektor. Altså har fart ingen retning, kun en størrelse, mens hastighed har både størrelse og retning. Længder kan kun være positive, da det for eksempel ikke giver mening at sige, at en pind er $-5\,\mathrm{cm}$ lang, og derfor er farten af et objekt altid en positiv størrelse. Det betyder, at i det endimensionelle tilfælde, ville både et objekt med en hastighed på $-5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ og $5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ have en fart på $5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Med farten kan vi altså sige om nogen løber eller går, men med hastigheden kan vi sige noget om, hvorvidt de løber eller går væk fra os eller tættere på os.

Dette er illustreret på figur 2.2, hvor der er tegnet en rød og en blå pil, der symboliserer to forskellige objekter, der bevæger sig med to forskellige hastigheder:



Figur 2.2: $|v|$ angiver længden, farten, af pilen, og v angiver, hastigheden, retningen af pilen. Farten er altid positiv, selvom hastigheden godt kan være negativ.

Acceleration

Det kan være, at du har hørt om acceleration, f.x. i forhold til biler. Der hører man måske om en bil, der kan accelerer fra "*0 til 100 på 10 sekunder*". Det der bliver sagt her er, at bilen har ændret sin hastighed fra $0\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{t}}$ til $100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{t}}$ over en periode på $10\,\mathrm{s}$. Når vi beskriver acceleration, så beskriver vi altså ændringen på hastigheden over, hvor lang tid det tog at ændre hastigheden, f.x. en stigning på $100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{t}}$ over $10\,\mathrm{s}$.

Dette minder dig måske om det ovenstående afsnit, hvor hastigheden var ændringen af positionen over tid. Acceleration er altså ændringen af ændringen af position over tid[3]. Vi kunne blive ved med at kigge på ændringer af ændringer af ændringer. Men det er sjældent at vi gider at gå dybere end acceleration. Ligesom hastigheder er accelerationer også vektorer, du kan jo ikke blive hurtigere i ingen retning, så står du bare stille.

For at beregne acceleration, så skal du egentligt bare gøre matematisk, som vi lige beskrev det. Acceleration er en ændring i hastighed over den tid, som det tog. En *ændring* i hastighed betyder, at vi finder ud af, hvor meget større den hastighed man slutter med er, end den man starter med. Man trækker altså de to hastigheder fra hinanden, f.x er ændringen fra 1 til 4 lig med 3. Det finder vi ved at trække 1 fra 4. I tilfælde hvor starthastigheden er nul, så trækker du så nul fra sluthastigheden, hvilket ikke ændrer noget. Når der står noget over noget andet, betyder det matematisk, at *noget* er divideret

[3] I gymnasiet lærer man noget, der hedder *differentialregning* og *integralregning*. Dette kan bruges til at beskrive ændringer i et system, og det kan således bruges til med matematik at beskrive hastighed som en ændring af position over tid, og ligeledes for acceleration.

med *noget andet*. Dette skriver vi ofte som brøker, som vi har beskrevet i afsnit 2.2, der starter på side 28.

Man finder altså accelerationen a ved at trække starthastigheden v_{start} fra sluthastigheden v_{slut}, altså sluthastigheden minus starthastigheden, og dividere det med hvor lang tid det tog $t_{slut} - t_{start}$, det giver os følgende formel:

$$a = \frac{v_{slut} - v_{start}}{t_{slut} - t_{start}} \tag{2.29}$$

Vi vil gøre den lidt mere generel:

$$a = \frac{v_{slut} - v_{start}}{\Delta t} \tag{2.30}$$

Her har vi beskrevet tiden det tog, som Δt, det gør vi, fordi i matematikkens verden betyder Δ[4], også kaldet *delta*, ændring. Fordi nogle gange er vi bare givet ændringen i tid, altså hvad starttid trukket fra sluttid var. Men i realiteten står der det samme, det er bare en mere generel, simpelere og pænere måde at skrive det på.

- **Opgave 2.3.2: Fra 0 $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}$ til 20 $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}$ på 10 sekunder** En cyklist begynder at cykle. Efter 5 sekunder har han nået en hastighed på 20 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

1)Hvor hurtigt har han accelereret? (Hint: brug ligning (2.30))

Kraft

Nu har vi beskrevet, hvad position, hastighed og acceleration er. Nu skal vi forklare det, som Isaac Newton arbejdede med, *kraft*. Kraft er forholdet mellem inertien, altså vægten, af en ting ganget med dens acceleration, det er faktisk det som Newtons anden lov siger:

$$F = m \cdot a \tag{2.31}$$

f.x. har vi tyngdekraften, som altid skubber os lodret ned.

Som I dog nok har lagt mærke til, så bliver vi ikke trukket ned igennem jorden. Dette er, fordi jorden skubber tilbage med en ligeså stor modsatrettet kraft, (den kraft kaldes normalkraften), som gør, at kræfternes reelle påvirkning på os er 0, vi har altså en ligning som giver nul:

$$F_{tyngde} + F_{normal} = 0 \tag{2.32}$$

Det er meget herligt at den giver nul, da den både gør, så vi ikke falder igennem jorden, og så vi videre kan udlede formler for impuls. Vi kommer ikke til at arbejde så meget mere med kræfter i dette kompendium, vi bruger dem kun til at udlede de love, vi skal bruge, og det gør vi nede i afsnit 2.4.

2.4 Impuls

Impuls er et begreb, der beskriver hastigheden af noget sammen med dets inerti. Inerti er et begreb for, hvor meget en ting vil modstride acceleration, altså ændring i sin hastighed. Det kan forståes som hastigheden af en ting, og hvor svær den er at stoppe. I vores tilfælde er inerti ensbetydende med masse eller vægt. Det kan være, at det umiddelbart giver mening, hvis vi forestiller os en bowlingkugle, den er svære at flytte end et papirsfly, da bowlingkuglen er tungere og har dermed højere en inerti end papirsflyet. Vægt er i vores verden det, der gør ting svære at flytte, f.x. en bowlingkugle ift. et papirsfly. Når der er bevægelse af ting med vægt eller rettere inerti[5], så kan det beskrives med impuls, dette gøres især, hvis der er to ting med inerti som rammer hinanden, f.x. en bowlingkugle, der rammer bowlingkegler, så kan vi se, hvordan hastigheden og impulsen

[4]Dette symbol er den store udgave Δ af det græske bogstav delta. Det lille delta ser sådan her ud δ.

[5]Det er en mærkværdig ting, at inerti og masse (ved hastigheder langt under lysets) er det samme i vores verden, prøv at forestille dig hvis de ikke var.

bliver overført fra en tung ting til en mindre tung ting og omvendt.

Nu skal vi vise jer udledningen af formlen for impuls. Det kan godt være, at matematikken ser tung ud, men vi skal nok forklare det trin for trin, og hvis du er blevet ekspert i algebraen vi har lært i afsnit 2.2, så vil du ikke have nogen problemer her. Vi starter med at kigge på Newtons 2. lov fra ligning (2.31), hvor vi vil forbinde den med ligning (2.30), der var formlen for acceleration:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{v_{slut} - v_{start}}{\Delta t} \tag{2.33}$$

Vi fortalte om, hvordan to kræfter kan udligne hinanden, ligesom tyngdekraften og normalkraften i ligning (2.32). Vi skal her se på et tilfælde, hvor to bolde rammer hinanden således, at de påvirker hinanden med den samme kraft, så den totale påvirkning giver nul:

$$F_1 + F_2 = 0 \tag{2.34}$$

Det vil vi sammensætte med den formel, ligning (2.33), vi lige sammensatte for, hvad en kraft er:

$$m_1 \cdot \frac{v_{1_{slut}} - v_{1_{start}}}{\Delta t} + m_2 \cdot \frac{v_{2_{slut}} - v_{2_{start}}}{\Delta t} = 0 \tag{2.35}$$

Nu kan vi så gange ændringen af tiden væk, da det er den samme tid for begge bolde:

$$m_1 \cdot \frac{v_{1_{slut}} - v_{1_{start}}}{\Delta t} \cdot \Delta t + m_2 \cdot \frac{v_{2_{slut}} - v_{2_{start}}}{\Delta t} \cdot \Delta t = 0 \cdot \Delta t \tag{2.36}$$

Så vi får:

$$m_1 \cdot (v_{1_{slut}} - v_{1_{start}}) + m_2 \cdot (v_{2_{slut}} - v_{2_{start}}) = 0 \tag{2.37}$$

Så kan vi gange ind i parentesen:

$$m_1 \cdot v_{1_{slut}} - m_1 \cdot v_{1_{start}} + m_2 \cdot v_{2_{slut}} - m_2 \cdot v_{2_{start}} = 0 \tag{2.38}$$

I kan måske se, hvad vi skal nu? Lægger vi alt det, der har et minus foran sig, til på begge sidder, så kan vi vise, at udtrykkende med sluthastighederne er lige med udtrykkene med starthastigheder:

$$m_1 \cdot v_{1_{slut}} + m_2 \cdot v_{2_{slut}} = 0 + m_1 \cdot v_{1_{start}} + m_2 \cdot v_{2_{start}} \tag{2.39}$$

Det lufter allerede lidt af, at der er noget som er bevaret før og efter stødet, det er selvfølgelig impuls, som vi nu bruger til at simplificere udtrykket. Vi skriver formlen for impuls som følgende:

$$p = m \cdot v \tag{2.40}$$

Så kan vi altså skrive følgende:

$$p_{1_{start}} + p_{2_{start}} = p_{1_{slut}} + p_{2_{slut}} \tag{2.41}$$

Her kan vi altså se, hvordan impulsen i starten lagt sammen, giver impulsen i slutningen lagt sammen. Det vil vi beskrive nærmere i afsnit 2.6, hvor vi taler om bevarede størrelser, som inkluderer bevarelse af impuls.

- **Opgave 2.4.1: Bowlingkuglens impuls** En bowlingkugle med vægten 5 kg bevæger sig med 10 $\frac{m}{s}$

  1) Find impulsen af bowlingkuglen (Hint: kig på ligning (2.40))

  2) Hvilken enhed har impuls? (Hint: prøv at ignorere tallene og bare kig på, hvad du ganger sammen)

2.5 Energi

Energi er et begreb, I nok har hørt om, det er en størrelse der kan have mange former, fopr eksempel har både en bil der kører, din mobil og dig forskellige former for energi. Når ting bevæger sig, så har det energi, hvilket er grunden til, at man kan omdanne bevægelse til elektrisk energi, f.x. ved en hamster i et hjul. Formlen for energien af noget, der bevæger sig, den *kinetiske energi*, er:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \tag{2.42}$$

I de fleste tilfælde kan formlen for, hvad energien af en ting, som gør noget, er, skrives som halvdelen af noget der har med tingen at gøre, ganget med hvor meget den gør det, i anden[6]. Her er det halvdelen af, noget der har med tingen at gøre (vægten), ganget med, hvor hurtigt den bevæger sig (hastigheden) i anden.

Vi kan se, at hastigheden er løftet til anden potens, så derfor betyder det ikke noget for energien, om den bevæger sig væk eller mod vores målepunkt. Det ville heller ikke give mening, hvis noget kunne have anti-energi, hvis det bare gik væk fra os, nej, den har brug for energi for at bevæge sig, den giver ikke energi for at bevæge sig.

- **Opgave 2.5.1: En flyvende hjerne** En hjerne med vægten på 2 kg flyver gennem luften med en hastighed på 2 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

  1)Hvor høj kinetisk energi har hjernen?

2.6 Bevarede størrelser

I afsnit 2.4 om impuls og i introduktion til kapitlet, har vi brugt begrebet *bevarede størrelser*, som betyder størrelser, som ikke ændrer sig[7]. I har måske hørt, at energi er konstant, det betyder, at vi hverken kan ødelægge eller skabe ny energi. Det siger dog ikke noget om, at vi ikke kan omdanne en type af energi til en anden type, så længe den samlede mængde energi holdes konstant.

Dette er sandt i hvad vi kalder et *lukket system*, som er et system, hvor der ikke er noget, der påvirker det ude fra. Et lukket system er f.x. en bold, der ligger på jorden, den har ingen kinetisk energi og ligger stille. Det system er ikke længere lukket, hvis der kommer en kraft, som en fodboldspiller, der sparker den. Dog kunne vi godt have haft fodboldspillerens spark med i vores udregning af energien. Derfor kan det måske give mening, hvordan hele universet er et lukket system, hvis vi tager alting med i vores udregninger. På den måde er der ikke nogle ydre kræfter, og der bliver ikke skabt energi, men I kan nok godt forestille jer, at det er lidt svært at holde styr på *hele* universet, vi estimerer derfor, at f.x. fodbolden er i et meget lukket system.

Bevaret energi

En bevaret størrelse, som vi kommer til at arbejde med, er bevaret energi. Som vi lige har nævnt, kan man ikke ødelægge og skabe energi, derfor er der altid så meget energi i et lukket system ved slut, som der var ved start. Energien kan ikke skabes eller ødelægges, men den kan godt *tabes*[8], ved f.x. at blive til varme, I har måske prøvet at gnide jeres hænder mod hinanden for varme, der omdanner du bevægelses-energi til varme-energi. Når energi bliver omdannet til varme, så mister vi altså noget af bevægelsesenergien,

[6]Dette er ikke en reel regel, men bare en huskeregel for, hvad energiformlen ofte er. For eksempel minder formlen for rotationel energi meget om denne. Faktisk er rotationel energi en form for kinetisk energi.

[7]Der findes en tæt sammenhæng mellem symmetrier og bevarede størrelser, så at for hver gang en størrelse er bevaret, findes der en symmetri som er bundet sammen med den.

[8]Når man mener, at energi *tabes*, så mener man bare, at det er blevet omdannet til en mindre brugbar energiform.

det er derfor, at ting ikke kan holde hastigheder uden, der bliver tilsat mere energi, medmindre de er i specielle situationer som f.x. ude i rummet.

Hvis vi ved, at der ikke er noget energi, der bliver *tabt* som varme, så kan vi beskrive bevægelsesenergien i et system som følgende:

$$E_{kin_1} = E_{kin_2} \tag{2.43}$$

Ligningen siger, at den kinetiske energi i situation 1 er den samme som den i situation 2. Denne ligning kan vi sætte sammen med formlen for kinetisk energi, så vi får at:

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 \tag{2.44}$$

Her siger vi at halvdelen af inertien, eller vægten, ganget med hastigheden i anden i situation 1 er det samme som halvdelen af inertien, eller vægten, ganget med hastigheden i anden i situation 2.

Hvis vi går ud fra, at tingene ikke ændrer vægt undervejs, så $m_1 = m_2$, kan vi beskrive dem begge med samme bogstav m, så kan vi se, hvordan der står det samme på begge sider, bortset fra v_1 og v_2, derfor ved vi, at $v_1 = v_2$, ud fra vores lignings regneregler:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \tag{2.45}$$

Vi kan dividere med $\frac{1}{2} \cdot m$ på begge sidder:

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot m}{\frac{1}{2} \cdot m} \cdot v_1^2 = \frac{\frac{1}{2} \cdot m}{\frac{1}{2} \cdot m} \cdot v_2^2 \tag{2.46}$$

Og så får vi:

$$1 \cdot v_1^2 = 1 \cdot v_2^2 \tag{2.47}$$

$$v_1^2 = v_2^2 \tag{2.48}$$

$$\sqrt{v_1^2} = \sqrt{v_2^2} \tag{2.49}$$

$$v_1 = v_2 \tag{2.50}$$

Vi får altså, at hastigheden i situation 1 er lig med hastigheden i situation 2, hvis der ikke tabes energi eller ændres inerti eller vægt, undervejs. Når vi arbejder med energibevarelsen, så vil vi dog arbejde med flere ting, der er i bevægelse, de udregninger kan ses i afsnit 2.7 om *stød*.

Bevaret impuls

En anden bevaret størrelse, som vi kommer til at arbejde med, er bevaret impuls i forhold til sammenstød. Det er simpelthen bare, at den mængde impuls, der var før et sammenstød, er den samme, der er efter. For eksempel to bolde, hvor den ene ligger stille og den anden har en hastighed, hvis de rammer hinanden, så deler hastigheden sig ud over dem begge. Hvad deres hastigheder slutter af med at være, det kommer så an på deres inerti, altså vægt, og hvilken form for stød det var, det vil vi dække nærmere i afsnit 2.7 om *stød*.

Igen så har vi behov for et isoleret system før dette gælder, igen hvis en fodboldspiller kommer ind og sparker til en af boldene, før vi har kunne finde deres slutimpuls, så kan der være mistet noget impuls eller skabt noget, impulsen vil altså ikke være bevaret, hvis der er noget der kommer ind og ændre på situationen.

Hvis der ikke har været nogle fodboldspillere, der har sparket til vores forsøg, det vil sige, at systemet har været isoleret, imens vi udførte vores forsøg, så kan vi opstille følgende formel, da impulsen er bevaret:

$$p_1 = p_2 \tag{2.51}$$

Ligesom vores formel for bevaret energi, så siger vi, at impulsen i situation 1 er den samme i situation 2. Nu kan vi, ligesom da vi opsatte formlen for bevaret energi, sætte formlen for impuls ind:

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2 \tag{2.52}$$

Hvis vi går ud fra, at der ikke bliver tabt eller tilføjet nogen inerti, eller vægt, så kan vi igen beskrive $m_1 = m_2 = m$, så vi kan lave følgende formel, som vi kan udlede fra:

$$m \cdot v_1 = m \cdot v_2 \tag{2.53}$$

Så kan vi igen dividere med inertien, eller vægten, på begge sider:

$$\frac{m}{m} \cdot v_1 = \frac{m}{m} \cdot v_2 \tag{2.54}$$

$$v_1 = v_2 \tag{2.55}$$

Fra begge vores udledninger kan vi se, at har et objekt en hastighed og ingenting sparker eller på anden vis påvirker det, så ændrer det ikke hastighed. I den virkelige verden vil der dog umiddelbart altid være lidt friktion og luftmodstand osv., men det ser vi bort fra, da vi alligevel kan få nogle nyttige resultater, og det gør beregninger meget nemmere. I fysik vælger vi ofte at tænke på verden som perfekt, for at gøre det muligt at regne på.

Men hvad nu hvis der ikke bare er én ting, der bevæger sig? Det er det spændende ved at regne med impuls, og det vi vil kigge på i afsnit 2.7 om *Stød*. Når vi snakker om "stød" er dette ikke elektrisk stød, men stød som i sammenstød.

2.7 Stød

Stød er det, der fremkommer, når flere bevægende ting rammer hinanden, og for at holde det simpelt, så vil vi holde os til to bevægende ting, der rammer hinanden. Principperne, der gælder for to bevægende objekter, er de samme, der gælder for tre, fire, firehundredeogtyve osv. bevægende objekter, men det er nemmere at holde styr på jo færre objekter, som man regner med.

Flere bevægende ting

Når vi har to (eller flere) bevægende ting, så må de jo have en energi og en impuls, men rammer de hinanden, så er der jo noget, der "sparker" og ændrer på de forskellige hastigheder i systemet. Det er sandt, men det betyder ikke, at systemet mister impuls eller energi, medmindre energien går tabt i varme. De ligninger, vi skrev op under afsnit 2.6 om bevarede størrelser, gælder faktisk for hele systemet. Det gør de, da vi kan lægge energier sammen og impulser sammen. Det er det, vi vil vise i de næste afsnit.

Energien af flere bevægende ting

Det kan måske give mening, at har vi to bolde, der bevæger sig med en energi på 10 J, så må et system med de to bolde i sig have en samlet kinetisk energi på 20 J, da skulle noget blive ramt af begge bolde, så ville det blive ramt af den samlede energi, derfor kan vi lægge et systems energier sammen. Vi opstiller derfor følgende formel for den samlede energi i et system:

$$E_{kin_{total}} = E_{kin_1} + E_{kin_2} + \ldots + E_{kin_n} \tag{2.56}$$

Her har vi brugt notationen n, det bogstavet betyder, er egentligt bare det antal ting vi har, hvis det er tyve bolde, så er $n = 20$, hvilket betyder, vi ligger energi 1 sammen med 2, sammen med 3, sammen med 4 osv. indtil vi har lagt det sammen med den kinetiske energi af den 20. og sidste ting. I vores opgaver arbejder vi ikke med mere end 2, men vi ville bare give jer den generelle formel. Denne formel kan vi så sætte sammen med formlen, vi havde for den bevarede energi i afsnit 2.6 for at få følgende:

$$E_{kin_{total_s}tart} = E_{kin_{total_s}lut} \tag{2.57}$$

Vi ville ikke bruge 1 og 2 til at beskrive situationerne her, for at formindske forvirring senere. I denne ligning behøver energi 1 og 2 i den totale kinetiske energi i startsituationen ikke være den samme som i den slutsituationen. Lægges de sammen, så skal de bare give det samme resultat. Faktisk kan energien godt bytte, som f.x. hvis du skyder en bold ind i en anden bold, der har samme masse, så stopper din bold måske, men den anden har præcis samme energi som din havde lige før den ramte.

Vi beskriver energien i et system med to bevægende ting, der rammer hinanden, via følgende formel:

$$E_{kin_{1_{start}}} + E_{kin_{2_{start}}} = E_{kin_{1_{slut}}} + E_{kin_{2_{slut}}} \tag{2.58}$$

Her siger vi at, hvis vi lægger den kinetiske energi af ting 1 og ting 2 sammen i startsituationen, så får vi det samme som, hvis vi lægger den kinetiske energi af ting 1 og ting 2 sammen i slutsituationen. I kan måske se, Hvis vi kender 3 af energierne, så kan vi finde den sidste via algebraen vi lærte i afsnit 2.2 om matematik.

- **Opgave 2.7.1: Energien af et bold stød** En bold, der bevæger sig med energien 10 J, er på vej mod en bold, som ikke bevæger sig, og den har dermed en kinetisk energi på 0 J.

  1)Hvad er den totale kinetiske energi i systemet med de to bolde? (Hint: prøv ligning (2.56))

  2)Efter boldene har ramt, så har den første bold nu en kinetisk energi på 5 J, hvad er den kinetiske energi af den anden bold efter den blev ramt? (Hint: prøv at bruge ligning (2.58), og isoler den anden bolds kinetiske energi)

Impulsen af flere bevægende ting

Ligesom med energien, når vi har to (eller flere) objekter, der bevæger sig, så kan vi lægge deres impuls sammen, men her skal man huske, at modsat energien har impuls en retning. Det betyder, at vi kan have en negativ impuls. Dette kan gøre at når vi ligger impulsen af to objekter sammen, kan vi få nul. Det kan være at det ikke givet intuitiv mening for dig, at impulsen er 0 i et system med bevægende ting, men husk at det vi taler om er den *totale* impuls. Prøv at forestille dig to bolde med lige stor impuls rammer en kasse, de har præcis impuls nok til at give kassen en fart på 1 meter i sekundet i den retning de bevæger sig, men da de kommer fra hver deres side, så skubber den ene bold kassen til højre, mens den anden skubber kassen til venstre, så kassen ender med at have en hastighed på 0. Vi opstiller altså følgende formel, som ligner den for energi:

$$p_{total} = p_1 + p_2 + \ldots + p_n \tag{2.59}$$

Igen, har vi brugt den mere generelle formel med n og igen så bruger vi ikke fremover n som højere end 2, derfor er det bare impuls 1 lagt sammen med impuls 2. I alle sammenstød, så er der impulsbevarelse (hvis vi går ud fra at de ikke mister inerti), så vi kan altså benytte den totale impuls sammen med formlen for impulsbevarelsen fra afsnit 2.6 **Bevarede størrelser**:

$$p_{total_{start}} = p_{total_{slut}} \tag{2.60}$$

Den kan vi så udvide igen, ligesom vi gjorde med energien i ligning (2.58):

$$p_{1_{start}} + p_{2_{start}} = p_{1_{slut}} + p_{2_{slut}} \tag{2.61}$$

Her kan vi altså se hvordan, hvis vi kender tre impulser, så kan vi finde den sidste, ved hjælp af algebra.

- **Opgave 2.7.2: Impulsen af et bold-stød** En bold bevæger sig med impulsen $10\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ er på vej mod en bold som ikke bevæger sig og dermed har en kinetisk energi på $0\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

  1)Hvad er den totale impuls i systemet med de to bolde? (Hint: brug ligning (2.60))

2)Efter boldene har ramt, så har den første bold nu en kinetisk energi på $5\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Hvad er den kinetiske energi af den anden bold efter den blev ramt? (Hint: du kender de to startimpulser og en slutimpuls, kan du isolere den sidste i ligning (2.61))

Stødtyper

Når vi arbejder med impuls, arbejder vi med to ideelle former for stød, det elastiske og komplet uelastiske stød. Forskellen mellem dem er, som du nok kunne gætte, at den ene er elastisk, og den anden slet ikke er. Det, at et stød er elastisk, betyder, der ikke går noget energi tabt i at deformere tingene, der rammer hinanden. Et eksempel på elastiske stød sker f.x. med hoppebolde og elastikker, de får ikke nogle permanente buler, som kræver energi at skabe, som f.x. biler gør, når de støder ind i hinanden.

Elastiske stød

Når vi har at gøre med et fuldstændigt elastiske stød, så kan vi regne med, at ingen energi går tabt i at lave buler eller deformation. Vi kan altså regne med at energien er konstant. Vi kan dermed opstille to formler for sammenstødet, ved at bruge både impuls- og energibevarelsen:

$$m_1 \cdot v_{1start} + m_2 \cdot v_{2start} = m_1 \cdot v_{1slut} + m_2 \cdot v_{2slut} \tag{2.62}$$

og

$$E_{kin_{1start}} + E_{kin_{2start}} = E_{kin_{1slut}} + E_{kin_{2slut}} \tag{2.63}$$

Ved kombination af de to ligninger, så kan vi, gennem en længere udledning, komme frem til følgende formel:

$$v_{1start} + v_{2start} = v_{1slut} + v_{2slut} \tag{2.64}$$

Kender vi tre hastigheder, så kan vi finde den sidste. Dette kan være de to starthastigheder og en sluthastighed eller omvendt.

- **Opgave 2.7.3: Hoppeboldstød** To hoppebolde støder ind i hinanden. Til start, så har den ene hastigheden $2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, og den anden har hastigheden $-1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, da den ruller imod den første. Til slut så har den anden hoppebold hastigheden $2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

1)Hvad vil den første hoppebolds sluthastighed være? (Hint: brug ligning (2.64)

2)Hvad er der sket med de to boldes hastigheder?

Komplet uelastiske stød

I fuldstændigt ikke elastiske stød, så ender de objekter, der rammer hinanden, med at bevæge sig i samme retning med samme hastighed, så de hænger altså sammen, efter de har ramt hinanden.[9] I fuldstændigt ikke elastiske stød, så er det faktum, der kan fremkomme buler o.l., der gør, at vi kan miste energi i sammenstødet, hvilket gør, at vi ikke kan regne med, at energien er konstant i sammenstødet. Vi udleder derfor en anden formel, hvor vi har at gøre med et komplet uelastisk stød, så vi kan opstille følgende variant af ligning (2.39):

$$m_1 \cdot v_{1_{start}} + m_2 \cdot v_{2_{start}} = m_1 \cdot v_{slut} + m_2 \cdot v_{slut} \tag{2.65}$$

Vi simplificerer den, ved at rykke m_1 og m_2 ind i en parentes, da de begge er ganget med v_{slut}:

$$m_1 \cdot v_{1_{start}} + m_2 \cdot v_{2_{start}} = (m_1 + m_2) \cdot v_{slut} \tag{2.66}$$

[9]Det kunne være to biler efter en trafikulykke

Så kan vi isolere sluthastigheden, den bruger vi som en generel formel for fuldstændigt ikke elastiske stød:

$$\frac{m_1 \cdot v1_{start} + m_2 \cdot v2_{start}}{(m_1 + m_2)} = \frac{(m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)} \cdot v_{slut} \tag{2.67}$$

Som giver os formlen:

$$v_{slut} = \frac{m_1 \cdot v1_{start} + m_2 \cdot v2_{start}}{m_1 + m_2} \tag{2.68}$$

Her har vi fire variable, så finder vi tre af dem, så kan vi via algebra lave en formel for at finde den sidste.

- **Opgave 2.7.4: Fælleshastighed af to kugler** To kugler bevæger sig mod hinanden og kolliderer ikke-elastisk, den ene har en hastighed på $2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ før sammenstødet, og den anden bevæger sig halvt så hurtigt imod den første før støddet og har derfor hastigheden $-1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. De vejer begge to 1 kg.

1)Hvad vil deres fælles sluthastighed være? (Hint: brug ligning (2.68))

Til slut bør nævnes, at man i den virkelige verden også oplever stød, som hverken er elastiske eller komplet uelastiske. Disse stød kalder man for uelastiske stød (ikke at forveksle med de *komplet* uelastiske stød!)- I disse stød bliver en del af energien tabt i form af derformering af objekterne, men objekterne hænger ikke sammen bagefter. For at regne på disse, bliver man nødt til at kende mere end bare starthastighederne og masserne.

2.8 Opgaver

Ud for hver opgave er en antal prikker fra 0 til 3. Flere prikker betyder sværere opgave, vurderet af arrangørerne. Du vil måske opleve at det ikke altid stemmer med din egen oplevelse af hvad der er svært, da alle har svært ved forskellige ting.

Opgave 2.8.1: Hawkeye

Hawkeye affyrer en pil med en inerti på 100 g og en fart på 30 m/s

1)Hvad er pilens kinetiske energi?

2)Hvor langt væk når den fra Hawkeye på 5 sekunder?

Opgave 2.8.2: Batmobilen I

Batmobilen kører med en hastighed på $-120\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{t}}$, og har en inerti på 1 ton

1)Hvor stor er batmobilens impuls?

2)Kører batmobilen i negativ eller i positiv retning?

3)Hvad er batmobilens kinetiske energi?

- **Opgave 2.8.3: Krudt og kugler I**

En superskurk affyrer en kanon direkte mod et tog, der kommer kørende. Toget har en hastighed på −100 km/t og en inerti på 27 tons, projektilet fra kanonen har en inerti på 2 kg og en hastighed på 600 m/s. Kanonkuglen rammer toget, og de to hænger sammen bagefter.

1)Hvad er hastigheden af toget og kuglen bagefter?

2)Antag nu i stedet et elastisk stød, hvad bliver sluthastighederne så?

- **Opgave 2.8.4: Batmobilen II**

En røver er ved at slippe væk, efter at have stjålet en kuffert med penge. Røveren kører i en flugtbil med hastigheden $70\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{t}}$. Batman forfølger røveren i sin batmobil, og indhenter røveren på 7 s. Røveren har et forspring på 120 m.

1) Hvor hurtigt kører batmobilen?

• Opgave 2.8.5: Hulk

Bruce Banner springer ud af et tog, og har en hastighed på 4 m/s. Bruce vejer 70 kg. Midt i luften transformerer han til Hulk. Efter transformationen har han en en hastighed på 1 m/s. Antag impulsbevarelse.

1) Hvor meget vejer Hulk?

2) Er den kinetiske energi bevaret?

3) Hvor stor en kinetisk energi har Bruce inden han transformerer?

4) Hvor stor er hans kinetiske energi efter han har transformeret?

5) Er hulk varmere eller koldere efter transformationen?

•• Opgave 2.8.6: Krudt og kugler II

Denne opgave fortsætter opgave 2.8.3.

1) Hvor mange kugler skal skurken affyre for at toget stopper helt? (Antag komplet uelastiske stød)

2) Løs ovenstående opgave med elastiske stød. Er det flere eller færre kugler? Er det som du forventede?

•• Opgave 2.8.7: Supermans knytnæve

En Bankrøver kommer løbende med en fart på $10\,\frac{\text{km}}{\text{t}}$ mod Superman. Superman slår ham, så han flyver tilbage. Efter kollisionen mellem bankrøveren og Supermans knytnæve, står næven helt stille, mens bankrøveren flyver bagud med en fart på $10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Bankrøveren har en inerti på 87 kg, mens Supermans knytnæve har en inerti på 200 g

1) Bestem hastigheden af Supermans knytnæve inden den rammer bankrøveren.

••• Opgave 2.8.8: Iron Mans raketter

Iron Man svæver i luften ved hjælp af sine raketter. Han påvirkes af tyngdekraften med en kraft på 1800 N.

1) Hvor stor en opadrettet kraft leverer raketterne?

Nu Begynder Iron Man at accelerere opad. På 10 sekunder opnår han en hastighed på 10 m/s.

2) Hvad er hans acceleraton?

3) Hvor stor en kraft skal raketterne levere, for at han opnår denne acceleration?

••• Opgave 2.8.9: Superman og toget

Et tog kommer kørende med en hastighed på $120\,\frac{\text{km}}{\text{t}}$. Toget har en inerti på 160 tons.

1) Bestem togets impuls

Et stykke $x = 100\,\text{m}$ længere henne af sporet er en bro hen over en afgrund styrtet sammen. Superman kommer flyvende og vil forsøge at stoppe toget inden det kører i afgrunden. Superman er 200 m bag togets forende, når toget er afstanden x fra afgrunden. Superman flyver med en konstant hastighed $u = 180\,\text{m/s}$.

2) Hvor langt tid tager det superman at nå frem til forenden af toget?

3) Hvor langt er toget fra afgrunden, når Superman når frem til forenden af toget?

Superman bremser nu toget ved at skubbe på forenden. Toget stopper lige nøjagtigt ved kanten af afgrunden. Det kan antages, at toget bremses med en konstant acceleration.

4) Hvor stor er accelerationen på toget under opbremsningen?

●●● Opgave 2.8.10: Superman og symboler

Superman har inertien m_s, og svæver i luften uden at bevæge sig. Han griber nu en bold med en inerti på m_b, der bevæger sig med en hastighed på v_b.

1)Hvad er Supermans hastighed bagefter?

2)Hvad er energien af bolden og superman efter han har grebet bolden?

3)Hvad er energien af systemet før bolden blev grebet?

4)Hvor meget energi er gået tabt i form af varme?

2.9 Forsøg: Luftpudevogne

Introduktion

I dette forsøg skal vi se på, om vi kan bekræfte, at der findes impulsbevarelse, som vi har gennemgået i dette forløb. Det vil sige, at vi skal se, om vi kan eftervise følgende:

$$p_{\text{før}} = p_{\text{efter}} \tag{2.69}$$

$$m_{\text{før}} v_{\text{før}} = m_{\text{efter}} v_{\text{efter}} \tag{2.70}$$

$$p_{\text{før}} = m_{\text{før}} v_{\text{før}} \quad \text{og} \quad p_{\text{efter}} = m_{\text{efter}} v_{\text{efter}} \tag{2.71}$$

Vi vil i dette forsøg tage udgangspunkt i to luftpudevogne, som vi vil støde ind i hinanden. Ved at se på vognenes inerti og deres start- og sluthastigheder, kan vi sammenligne og se, om der er impulsbevarelse, som beskrevet i afsnit 2.6.

Forsøgsopstilling

Der er forskellige måder, som I kan prøve at eftervise impulsbevarelse, men vi tænker, at I kan lave en opstilling i stil med opstillingen i figur 2.3, hvis I ikke selv har nogle forslag.

Figur 2.3: Forslag til en mulig forsøgsopstilling til forsøget.

Materialer

Til forsøget har I følgende materialer til rådighed:

- 2 stativer med stænger, muffer og fødder
- 2 fotosensorer
- 2 luftpudevogne med finner og lodder
- 1 luftpudebane
- 1 blæser
- 1 LabQuest enhed

- 1 computer til målinger
- vægt

Fremgangsmåde

Her er beskrevet, hvordan I kan bruge det udstyr, som er givet til, og har I andre ideer til, hvordan tingene kan bruges, kan I spørge underviserne og høre, hvad de synes.

- For at opsætte luftpudevogne skal I sætte en skinne op på et bord og fastgøre en af blæserne til enden af skinnen. Hvis I så tænder for blæseren burde I kunne placere en af luftpudevognene på skinnen og køre den frem og tilbage uden den store friktion mellem vognen og skinnen. (Hvorfor er dette en god ting i forhold til forsøget?)
- Vognene har forskellige ting, der kan sættes på dem, så I kan eksperimentere med forskellige ting på vognene.
- Stativerne sættes sammen med stativmufferne, som er metal objekterne med to huller, så I kan indsætte to metalstænger, der så vil stå vinkelrette på hinanden. Ved brug af stativerne kan I for eksempel sætte fotosensorerne i jeres opstilling. (Hvorfor er dette en god ting i forhold til forsøget?)
- Fotosensorerne kan bruges til at detektorer, hvornår noget blokerer for lysstrålen mellem de to ben i fotosensorerne. (Hvordan kan dette mon bruges?)

Data

I bestemmer selv, hvilke værdier, som I vil prøve at måle på, og tabel 2.2 er et forslag til, hvad I kan beregne og nedskrive. I kan således sagtens skrive nogle andre ting ned.

Forsøg	Masse 1 m_1	Masse 2 m_2	Hastighed 1 v_1	Hastighed 2 v_2	Impuls 1 p_1	Impuls 2 p_2
1: Før						
1: Efter						
2: Før						
2: Efter						
3: Før						
3: Efter						
4: Før						
4: Efter						
5: Før						
5: Efter						
6: Før						
6: Efter						
7: Før						
7: Efter						
8: Før						
8: Efter						
9: Før						
9: Efter						

Tabel 2.2: Forslag til tabel til nedskrivning af værdier.

Kapitel 3

Kemi

Hvad er Kemi for os?

Jens Peter

Kemi for mig er at kunne forstå de uåbenlyse mekanismer i verden. Uden teori er kemi magi. Man arbejder i kemi med at skabe stoffer ud fra andre stoffer. Det er her, hele medicinindustrien stammer fra, men hvad, der er endnu mere interessant, er, at man ikke kan se, hvilket stof man har fået lavet. Derfor bliver man igen nødt til at udføre analyser, der bekræfter, at man har lavet det rigtige stof. Præcis som at samle en legofigur med bind for øjnene.

Mette

Grunden til jeg finder kemi interessant er det kan forklare hvorfor en reaktion forløber og hvordan man kan påvirke den. Man kan se, at der er sket en reaktion, men hvad er der enlig sket? Det kan man forklare med kemi. Stoffers kemiske egenskaber kan forklare hvorfor stoffet reagerer, som det gør. Kemi kan bruges til medicinfremstilling, analyse af fødevare, fremstilling af farvestoffer og meget mere. For mig kan kemi give forklaring hvordan ting hænger sammen og bruge kemi til noget.

Knut

Kemi for mig er læren om verdens komponenter og hvordan, alt er bygget op. I kemi arbejder man på at kunne syntetisere nye stoffer og kunne detektere dem, dette gør man med et hav af analysemetoder. Kemi er derfor et naturvidenskabeligt fag, hvor al den viden, man har, kommer fra forsøg og eksperimenter. Ved hjælp af kemien har man kunne opskalere en lang række processer og udvikle nye kemiske stoffer eller kunne producere stoffer, man tidligere fik fra naturen. Kemi hænger derfor meget sammen med industrien og har været en "katalysator"for industrialiseringen i de sidste 150 år. Blandingen af at finde ud af, hvordan verden er bygget op, og samtidig være en vigtig del af industrien er det, jeg synes, der gør kemi megafedt.

3.1 Matematisk intro til kemi

Kemi handler om, hvordan stoffer reagerer med hinanden. Her kan man blandt andet regne på mængder, der er før og efter en reaktion. Her findes flere formler til at beregne forskelige ting inden for kemien. Nogle af basisformlerne vil blive gennemgået i afsnittet mængdeberegning. For at kunne bestemme en kemisk størrelse skal der til tider rykkes rundt på variablerne i en formel.

Ligningsisolation

Når du har et udtryk, hvor en ukendt variabel x indgår, kan du ændre udtrykket og få x til at stå alene, hvilket kaldes at isolere. Det kunne eksempelvis være at bestemme x´s værdi i udtrykket:

$$21 \cdot x = 63$$

Her divideres med 21 for at få x til at stå alene.

$$\frac{21 \cdot x}{21} = \frac{63}{21}$$

Værdien for x vil svare til brøken 63/21.

$$x = 3$$

I kemi vil det typisk være symboler i en formel, som isoleres. Det, man isolerer for, vil være den, som man ikke kender værdien for. Derfor er det vigtig at kunne isolere rigtigt, så man får bestemt værdien for det, man vil, og ikke laver en fejl, der giver et forkert resultat. Det kunne være en formel hvor to ting var divideret med hinanden.

$$\frac{a}{b} = c$$

Hvis a skal stå alene, skal man gange med b.

$$a = c \cdot b$$

Derimod hvis to symboler er ganget med hinanden, skal man dividere med den, som skal over på den anden side af lighedstegnet. Et eksempel kunne være, at b skulle stå alene i ligningen nedenfor.

$$a = b \cdot c$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b \cdot c}{c}$$

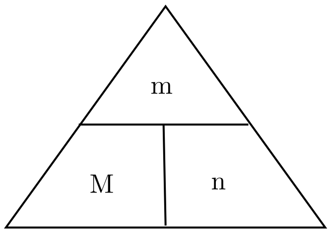
Når det samme symbol eller tal er i både tæller og nævner giver det 1. Altså når b gange c divideres med c, svarer det til b gange 1. Det giver dermed b.

$$b = \frac{a}{c}$$

3.2 Intro til kemi

De fleste ved, at når en mentos kommer ned i en colaflaske, vil colaen sprøjte op af flasken, men meget få ved hvorfor. Ved hjælp af kemi kan vi forklare, hvorfor det sker. Alting i verden er opbygget af grundstoffer, som er ting som jern og guld. Grundstoffer er stoffer, der ikke kan ændres til andre stoffer. Det vil sige at, en klump jern altid vil være en klump jern og kan ikke blive til andre grundstoffer. Grundstoffer kan reagere med hinanden og danne molekyler, som er en kombination af begge grundstoffer. F.eks. er rust en kemisk reaktion. Når grundstoffet Jern (symbol Fe) reagerer med grundstoffet ilt (symbol O), bliver der dannet rust. Dette kan skrives som $Fe + O \longrightarrow FeO$. Det kan ses i denne ligning, at begge grundstoffer findes på begge sider af pilen.

Oftest er det molekyler (altså stoffer bestående af mere end ét grundstof) der indgår i reaktioner. En mere kompliceret reaktion er $C_6H_{12}O_6 + 6\,O_2 \longrightarrow 6\,CO_2 + 6\,H_2O$. Her kan det ses, at for at der kan være lige mange af hvert atom på begge sider af pilen, bliver der nødt til at være 6 O_2, 6 CO_2 og $6\,H_2O$.



Eksempel

Betragt følgende reaktion

$$CH_4 + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O$$

På venstre side af reaktionspilen er der 4 H-atomer, 1 C-atom og 2 O-atomer og på højre side er der 1 C-atom, 3 O-atomer og 2 H-atomer. Der er flere O-atomer på højre side end venstre side, så derfor sættes et 2-tal foran O_2

$$CH_4 + 2\,O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O$$

Nu er der flere O-atomer på venstre side end højre. Derfor må der også være 2 H_2O molekyler, altså

$$CH_4 + 2\,O_2 \longrightarrow CO_2 + 2\,H_2O \qquad \{1\}$$

Nu kan det ses at der er lige mange af hvert atom på begge sider af reaktionspilen og derfor er reaktionen afstemt.

3.3 Mængdeberegning

For at kunne regne med de mængder, man skal bruge, for at kunne lave bestemte reaktioner, har man brug for mængdeberegninger.

Hvad er mængdeberegning?

Mængdeberegning bruges til at holde styr på, hvor meget der er af hvert stof, hvordan stofferne er i forhold til hindanden og til at finde ud af, hvor meget man danner af produkter. F.eks. i reaktionen (1), er der et bestemt forhold mellem det forbrændte CH_4 og det dannede H_2O på 1:2 (én til to). Det vil sige, at der bliver dannet dobbelt så meget vand, som der bliver forbrændt af methan. Indenfor mængdeberegning er der tre grundbegreber:

- Stofmængde: hvor mange molekyler der er, symbol n
- Masse: vægten af stoffet, symbol m
- molarmassen: massen af et mol af et vilkårligt stof, i de fleste tilfælde ligmed vægten, symbol M

Kendes to af disse værdier, kan man finde den sidste. Sammenhængen mellem dem ses på den følgende skitse.

Der vil nu blive gemmen gået de introducerede begreber.

Stofmængder og mol

Stofmængden af noget stof er antallet af molekyler, vi arbejder med. For at kunne regne med stofmængder, indfører vi enheden mol. Grunden til dette er, at vi ofte arbejder med virkelig mange molekyler, f.eks. i et kg vand er der $3,3 \cdot 10^{25}$ molekyler af vand. På grund af dette har man indført enheden mol. mol er bare et meget stor tal, helt konkret er et mol $6,022 \cdot 10^{23}$ molekyler.

Molarmasse

Molarmasse er massen af et bestemt stof/molekyle, når man har én mol af dette. Man kan udregne molarmassen af et stof på ved at tælle hvor mange der er af hvert grundstof og der efter gange dette med molarmassen af det grundstof, der visses et eksempel.

Regneeksempler

Der skal findes molarmassen af en simpel aminosyre $C_2H_5NO_2$. Molarmassen af carbon, hydrogen, nitrogen og oxgen er henholdsvis $12\,\frac{g}{mol}$, $1\,\frac{g}{mol}$,$14\,\frac{g}{mol}$ og $16\,\frac{g}{mol}$. Der er 2 C-atomer, 4 H-atomer, et N-atom og 2 O-atomer per aminosyre-molekyle.

Et udtryk for molarmassen af aminosyre opskrives.

$$M_{Aminosyre} = M_C \cdot 2 + M_H \cdot 5 + M_N \cdot 1 + M_O \cdot 2 \tag{3.1}$$

$$= 12\,\frac{g}{mol} \cdot 2 + 1\,\frac{g}{mol} \cdot 5 + 14\,\frac{g}{mol} \cdot 1 + 16\,\frac{g}{mol} \cdot 2 = 75\,\frac{g}{mol} \tag{3.2}$$

Sammenhæng mellem stofmængde, molarmasse og masse

Der gælder den følgende sammenhæng mellem stofmængde, molarmasse og masse:

$$n = \frac{m}{M} = \text{stofmængde} = \frac{\text{masse}}{\text{molarmasse}} \tag{3.3}$$

For at kunne finde én af de tre, skal man kende de to andre. Der vises et eksempel på, hvordan man finder molarmassen ud fra, at man kender massen og stofmængden.

Eksempel

Man vil undersøge en gas, om det er methan (CH_4) eller ethan (C_2H_{61}), hvor man har kunne køle gassen ned og målt massen af den til at være 57 g, og ved hjælp af en trykmåling er det fundet, at der er 3,4 mol gas. Der findes først molarmassen af methan og ethan.

Methan består af ét carbonatom og 4 hydrogenatomer og har en molarmasse på

$$M_{\mathrm{CH_4}} = 12\,\mathrm{g/mol} + 4 \cdot 1\,\mathrm{g/mol} = 16\,\mathrm{g/mol}$$

og ethan består af 2 carbonatomer og 6 hydrogenatomer og en molarmasse på:

$$M_{\mathrm{C_2H_6}} = 12\,\mathrm{g/mol} \cdot 2 + 6 \cdot 1\,\mathrm{g/mol} = 30\,\mathrm{g/mol}$$

Nu findes molarmassen af den undersøgte gas, og derefter bliver den sammenlignet med molarmassen af ethan og methan. Der bruges ligning (3.3) til at isolere for molarmassen:

$$M = \frac{n}{n} \cdot M = \frac{m}{M} \cdot M \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n} \tag{3.4}$$

De kendte værdier indsættes i dette:

$$M_{gas} = \frac{m}{n} = \frac{57\,\mathrm{g}}{3{,}4\,\mathrm{mol}} = 16{,}7\,\frac{g}{mol} \tag{3.5}$$

Det vil sige, at den ukendte gas består primært af methan, da 16,7 er tættere på 16 end 30.

Opgave 3.3.1: Bonus opgave
Hvor mange mol methan består den ukendte gas af, når det antages, at gassen er en blanding af methan og ethan?

Reaktioner og mængdeberegning

I dette afsnit vil der blive set på, hvordan man laver mængdeberegning med reaktioner.

Eksempel
Hvis man for et eksempel har en forbrænding, er det vigtigt at vide, hvor meget ilt, der tilsættes for, at alt bliver forbrændt. Betragt følgende reaktion af forbrænding af hexan:

$$C_6H_{14} + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O$$

Det kendes, at der bliver tilført 1,2 mol hexan, beregn massen af O_2, der skal tilføres.

Fremgangsmåde

1. Afstem reaktionsligningen
2. Gang med forholdet imellem hexan og ilt for at finde stofmængden af ilt
3. Udregn molarmassen af ilt
4. Udregn massen af ilt ved brug af ligning (3.3)

Reaktionen afstemmes ved tage udgangspunkt i hexan, det indholder 6 carbon-atomer. Det eneste af produkterne, der indeholder carbon, er CO_2, derfor skal der være 6 CO_2 for, at der er lige mange carbon-atomer på begge sider af reaktionen. Hexan indholder 14 hydrogen-atomer. Det eneste af produkterne, der indeholder hydrogen (som indholder 2 hydrogen-atomer) er H_2O. Der skal være 7 H_2O. Det sidste, der mangler, er at blive afstemt for oxygen. Produkterne indholder $6 \cdot 2 + 7 \cdot 1$ oxygen-atomer. Det vil sige, at reaktanterne skal indholde 19 oxygen-atomer. Den eneste reaktant, der indholder oxygen, er O_2, som indholder to oxygen-atomer. Det vil sige, at der skal tilføres 9,5 O_2 per hexan. Den afstemte reaktion opskrives:

$$C_6H_{14} + 9.5\,O_2 \longrightarrow 6\,CO_2 + 7\,H_2O$$

Det ses, at forholdet mellem hexan og ilt er 9,5, det vil sige, at der skal bruges 9,5 gange mere ilt ind hexan.

$$n_{ilt} = n_{Hexan} \cdot 9,5 = 1{,}2\,\text{mol} \cdot 9,5 = 11{,}4\,\text{mol} \tag{3.6}$$

Der findes massen af ilten, der tilføres, ved at isolere for massen i ligning (3.3)

$$n \cdot M = \frac{m}{M} \cdot M = m \tag{3.7}$$

Der udregnes molarmassen af ilt. "Ilt"indeholder 2 oxygen-atomer, der hver har en molarmasse på 16 g/mol, det vil sige, at molarmassen for O_2 er 32 g/mol. Massen udregnes:

$$m_{O_2} = 32\,\frac{\text{g}}{\text{mol}} \cdot 11{,}4\,\text{mol} = 365\,\text{g} \tag{3.8}$$

Det vil sige, at der skal tilføjes 365 g ilt for at kunne brænde alt hexanen af.

Begrænsende faktor

Den begrænsende faktor er den reaktant, der først slipper op, hvis man lader reaktionen forløbe fuldstændigt. Den begrænsende faktor sætter altså grænsen for, hvor meget stof, der kan dannes på den højre side af reaktionspilen. Når man skal bestemme den i et konkret tilfælde, ser man på, hvilket stof på venstre side af reaktionspilen, der er har mindst stofmængde, når der er taget højde for forholdet mellem reaktanterne. En god måde at illustrere konceptet, kan ses på nedenstående figur:

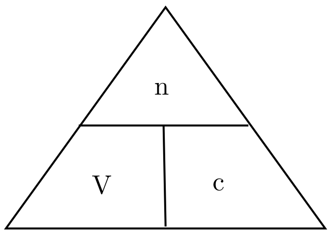
Figur 3.1: Figur til illustration af begrænsende faktor (kilde: [6])

Koncentrationer

Når stofmængder er begrænset til et rumfang, kan det betegnes som koncentration. Hvis man f.eks. har en beholder med 1 liter vand og 1 mol af et stof opløst i vandet, er der således en koncentration på 1 mol pr. liter, og den samme koncentration kan opnås hvis man har 2 mol i 2 liter vand. Der er således lige mange molekyler pr. plads. Koncentration kan regnes med følgende formel

$$c = \frac{n}{V} \tag{3.9}$$

Hvor n er stofmængden, V er rumfanget og c er koncentrationen som er målt i enheden molær (M), som betyder mol pr. liter. Sammenhængen mellem n, V og c kan ses på følgende skitse



Figur 3.2: Regnetrekant over koncentrationer

Fordelen ved koncentrationer er, at hvis koncentrationen er kendt, vil man kunne bestemme stofmængden ud fra et afmålt rumfang.

Regneeksempel

Hvis 2 gram NaCl opløses i 2 L vand, hvad vil koncentrationen af NaCl så være?
Først beregnes stofmængden. Molarmassen af NaCl er 58,5 $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$

$$n = \frac{m}{M} = \frac{2\,\mathrm{g}}{58{,}5\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}} = 0{,}0342\,\mathrm{mol}$$

Koncentrationen beregnes ud fra formlen $c = \frac{n}{V}$

$$c = \frac{0{,}0342\,\mathrm{mol}}{2\,\mathrm{L}} = 0{,}0171\,\mathrm{M}$$

Titrering

Titrering er en metode til at bestemme en mængde af et stof i en opløsning. Det fungerer ved, at prøven får tilsat en titrator ved hjælp af en burette. Man nærmer sig ækvivalenspunktet for hver dråbe titrator, der tilsættes, og man stopper titreringen, når ækvivalenspunktet er nået. Ækvivalenspunktet er, når der ikke er mere prøve, der kan reagere med titratoren, og titratoren reagerer dermed i stedet med opløsningen. For at kunne se hvornår ækvivalenspunktet er nået, bruges for det meste en indikator, der skifter farve, når ækvivalenspunktet er nået.

En kendt titrering er titreringen af jern(II) med $KMnO_4$(figur 3.3) som titrator, reaktionen (2) er som følger:

$$5\,Fe^{2+} + MnO_4^- + 8\,H^+ \longrightarrow Mn^{2+} + 5\,Fe^{3+} + 4\,H_2O \qquad \{2\}$$

Figur 3.3: Billede af $KMnO_4$ salt kilde([7])

Her ses det, at når der er Fe^{2+} til stede, vil MnO_4^- reagere med Fe^{2+} og oxidere det til Fe^{3+} og Mn^{2+}, men når der ikke er mere Fe^{2+} i opløsningen, vil MnO_4^- være i opløsningen, og den vil begynde at blive lilla, idet MnO_4^- er meget lilla, hvorimod Mn^{2+} er næsten farveløs. På den måde kan man se, at når opløsningen er blevet lilla, indeholder opløsningen ikke længere noget jern(II).

Beregning
Der regnes nu på, hvor meget jern(II) prøven indeholder, og hvad koncentrationen af jern(II) er. Prøven havde en volumen på 25 ml, og koncentrationen af MnO_4^- er på 0,4 M, og der blev brugt 20 ml af titratoren. Der udregnes først stofmængden af MnO_4^-, der er tilsat til prøven ved hjælp af ligning (3.9). Derefter findes forholdet imellem MnO_4^- og Fe^{2+}, og dette forhold ganges med stofmængden af MnO_4^- for at få stofmængden af Fe^{2+}. Til sidst udregnes koncentrationen af jern(II) i prøven ved brug af ligning (3.9). Der udregnes stofmængden af det brugte MnO_4^- brugt.

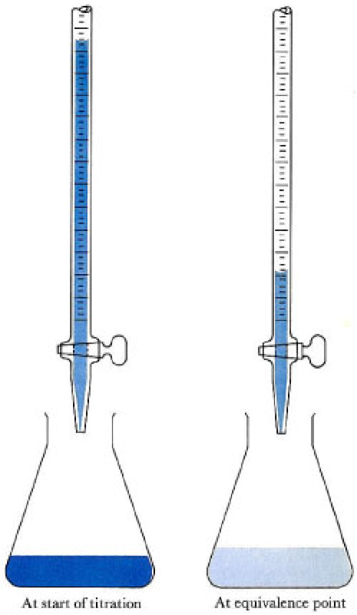
$$n_{MnO_4^-} = C_{MnO_4^-} \cdot V_{MnO_4^-} = 0{,}4\,\mathrm{M} \cdot 20\,\mathrm{ml} = 0{,}008\,\mathrm{mol} \qquad (3.10)$$

Det ses i reaktionen (2), at der for hver MnO_4^- skal bruges 5 Fe^{2+}, Stofmængden af Fe^{2+} er dermed 5 gange større end $n_{MnO_4^-}$.

$$n_{Fe^{2+}} = 5 \cdot n_{MnO_4^-} = 5 \cdot 0{,}008\,\mathrm{mol} = 0{,}04\,\mathrm{mol} \qquad (3.11)$$

Der findes nu koncentrationen af Fe^{2+} i opløsningen.

$$c_{Fe_2^+} = \frac{n_{Fe_2^+}}{V_{Fe_2^+}} = \frac{0{,}04\,\mathrm{mol}}{25\,\mathrm{ml}} = 1{,}6\,\mathrm{mol/L} \qquad (3.12)$$



Figur 3.4: Billede af en vilkårlig titrering kilde[8]

3.4 Idealgasligningen

Idealgasligningen beskriver sammenhængen mellem tryk, volumen, temperatur og stofmængde og er som følgende:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \tag{3.13}$$

Hvor p er tryk, V er volumen, n er stofmængde, R er gaskonstanten, og T er absolut temperatur (måles i K, som udtales "Kelvin"). Denne formel kan bruges til alle gasser, der har en temperatur og et tryk, der minder om standardbetingelser. Da R er en konstant, kan enhver værdi findes ved, at man kender tre af de andre værdier. R's værdi afhænger af enhederne. Herunder ses en tabel med de relevante værdier og tilhørende enheder for R.

Tabel 3.1: R's værdier til forskellige enheder

Værdier for R	Enheder
0,083144598	$\mathrm{L \cdot bar \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$
8,3144598	$\mathrm{m^3 \cdot Pa \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$
8,3144598	$\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$

Inden vi viser et eksempel på anvendelse af idealgasligningen, skal vi have en ting på plads omkring T. T er absolut temperatur, dvs. 0 K er den laveste mulige temperatur. Kelvin-skalaen er dermed en smule anderledes en den skala, vi er vant til at arbejde med, nemlig Celsius-skalaen, hvor $-273,15°$ C er den laveste temperatur. Heldigvis er Kelvin-skalaen lavet sådan, at graderne har samme størrelse (en stigning på 1 K er præcist det samme som en stigning på 1° C). Dermed kan man regne mellem de to skalaer således:

$$T = t + 273{,}15 \tag{3.14}$$

Hvor t er temperaturen målt i grader C. Vi viser nu et eksempel på anvendelse af idealgasligningen.

I en lukket beholder med ren helium er der et tryk på 1 bar, den har volumen 1 L, og en temperatur på 27 °C. Vi vil beregne stofmængden. Først beregnes T:

$$T = 27° + 273{,}15\,\mathrm{K} = 300{,}15\,\mathrm{K} \tag{3.15}$$

Vi anvender idealgasligningen til at isolere for n og der indsættes de kendte værdier:

$$n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{1\,\mathrm{bar} \cdot 1\,\mathrm{L}}{0{,}083\,14\,\mathrm{bar} \cdot \mathrm{L} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot 300{,}15\,\mathrm{K}} = 0{,}04\,\mathrm{mol} \tag{3.16}$$

3.5 Uorganisk kemi

Hvad er et atom og en ion?

Vand og luft består af mindre bestanddele kaldet molekyler. Molekyler kan opdeles i mindre partikler kaldet atomer, vi kender som grundstofferne fra det periodiske system. Atomer består af en kerne og elektroner, der bevæger sig rundt om kernen. I et atom er der lige mange elektroner og protoner, hvilket gør, at atomet har en neutral ladning udadtil. Atomkernen indeholder positivt ladede protoner og neutrale neutroner. Elektronerne er negativt ladet. Elektroner bevæger sig i skaller, hvor der i en skal n kan være et antal elektroner:

$$e = 2 \cdot n^2$$

Så i første skal kan der være 2 elektroner, i anden 8 elektroner, i tredje 18 elektroner. Der er mest stabilitet, hvis den yderste skal enten indholder har 2 elektroner (hvis der er en skal) eller 8 elektroner (hvis der er mere end én skal). For at opnå dette antal elektroner i den yderste kan to atomer binde sig ved enten at dele elektroner eller afgive/modtage elektroner. Eksempelvis har grundstoffet natrium 3 skaller, hvor den yderste skal kun har en elektron. For at få 8 i den yderste skal, kan natrium afgive elektronen fra skal nr. 3. Det betyder, at natriumatomet mangler en elektron og vil derfor være positiv ladet. Når et atom enten har afgivet eller modtaget en eller flere elektroner, har det en ladning og kaldes for en ion. Reaktionen for fraspaltningen kan ses som:

$$\mathrm{Na} \longrightarrow \mathrm{Na}^{1+} + \mathrm{e}^{1-}$$

Klor har også 3 skaller, her har den tredje skal 7 elektroner og mangler derfor en, før der er 8. Den kunne derfor optage den overskydende elektron fra natrium, hvilket vil give den en negativ ladning på 1.

$$\mathrm{Cl} + \mathrm{e}^{1-} \longrightarrow \mathrm{Cl}^{1-}$$

Når de to reaktioner sammensættes bliver det således:

$$\mathrm{NaCl} \longrightarrow \mathrm{Na}^{1+} + \mathrm{Cl}^{1-}$$

Ionforbindelsen NaCl (natriumklorid) kender vi som almindelig borsalt. Her kan det være som krystaller i saltskålen, hvor de danner et iongitter. Et iongitter består af mange enheder, så derfor skrives formelenheden for iongitre, som er forholdet mellem ionerne. I tilfældet med NaCl er der én natrium for hver klor. Når det opløses i vand, forsinder krystallerne. Dette skyldes, at i vand bliver natriumklorid til natriumioner og kloridioner. Man skelner mellem simple ioner, der består af et enkelt atom, og sammensatte ioner, der består af flere atomer. Et eksempel på en simpel ion er den tidligere nævnte Cl^{1-}. Et eksempel på en sammensat ion kunne være ${NO_3}^{1-}$ (nitrat).

Opløselighed

En af ionernes egenskaber er, de kan opløses i vand, da deres iongitter opløses ved, at ionerne skilles fra hinanden og bevæger sig rundt i opløsningen. Forskellige ionforbindelser kan opløses mere eller mindre i vand. NaCl er letopløselig i vand, da der kan opløses 36,0 g pr 100 mL vand. Derimod er AgCl (sølvnitrat) tungtopløselig, da kun 0,00019 g AgCl kan opløses pr 100 mL vand. Opløseligheden for nogle forskellige ionforbindelser kan ses på figuren nedenfor, hvor L betyder letopløselig, T er tyngopløselig, og - at ionforbindelsen ikke forekommer.

	Na^+	Cu^{2+}	Ba^{2+}	Ag^+
NO_3^-	L	L	L	L
Cl^-	L	L	L	T
SO_4^{2-}	L	L	T	T
CO_3^{2+}	L	-	T	T

Figur 3.5: Nogle få ioners opløselighed i vand ved 20°C

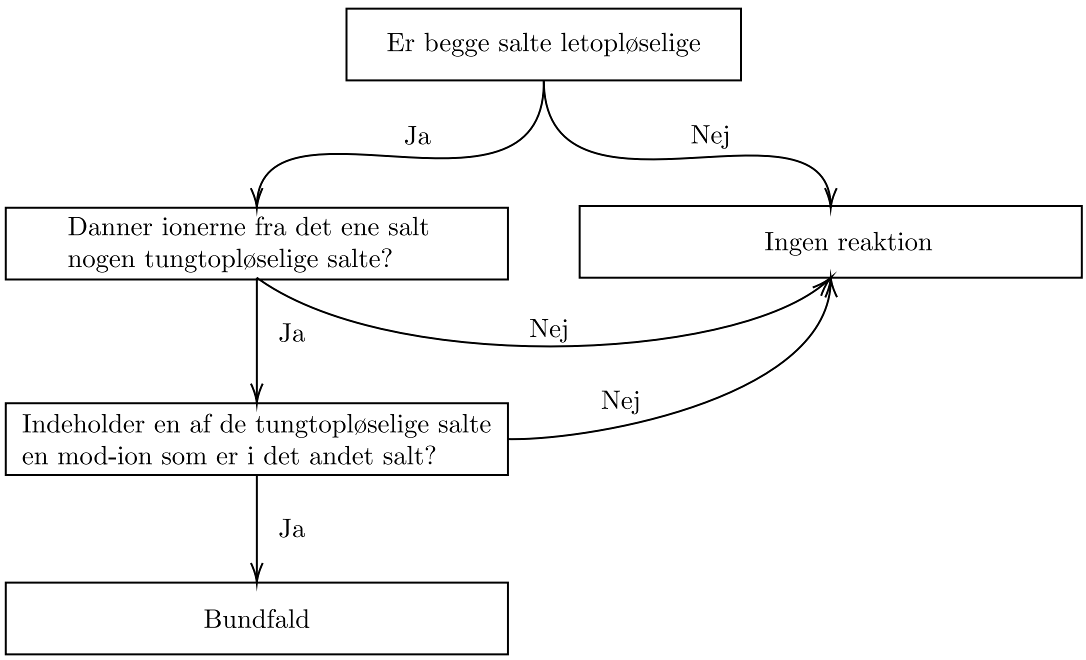
Opløseligheden for ionforbindelsen afhænger af temperaturen. Her er hovedreglen, at salte generelt bliver mere opløselige, jo varmere vandet bliver, dog med få undtagelser.

Fældningsreaktioner

Opløselighed afhænger ikke kun af hvilke stoffer, der forsøges opløst, men også hvilke ioner, der dannes, når stoffer opløses. Hvis man f.eks. forsøger at opløse NaCl og $AgNO_3$ i et reagensglas kan man af opløselighedsskemaet se, at de begge er letopløselige. Derfor vil man undre sig meget over, at der ligger et hvidt stof på bunden af reagensglasset, når de to opløsninger hældes sammen. Stoffet på bunden af reagensglasset er AgCl. Dette stof er dannet, fordi der i opløsningen vil være Ag^+-ioner og Cl^--ioner. Man kan se på opløselighedstabellen, at sølv hellere vil binde til klorid end nitrat, og at klorid hellere vil binde til sølv end natrium, så derfor vil sølv og klorid reagere og danne stoffet sølvnitrat.

$$Ag^+ + Cl^- \longrightarrow AgCl$$

At bestemme om et stof vil udfælde, kan gøres med følgende trin:



Figur 3.6: Diagram over fældningsreaktion

3.6 Øvelse: Titrering

Jokeren har anskaffet sig en pistol, der skyder med kemikaliet NaOH (natriumhydroxid). NaOH er farligt, da det ætser og derfor kan give øjenskader, hvis jokeren skyder efter folks øjne, og derfor skal Batman afværge det. Han ved, at hvis man blander lige store koncentrationer af NaOH og HCl (saltsyre), dannes vand og NaCl.

$$\mathrm{NaOH + HCl \longrightarrow H_2O + NaCl}$$

Batman har derfor tænkt sig at skyde med HCl mod NaOH-strålen, så det bliver til saltvand. For at kunne gøre det, skal han bestemme koncentrationen af NaOH først. Dette gøres ved, at han indsamler en prøve af jokerens NaOH og titrerer. For at finde ud af hvornår der er lige meget NaOH og HCl, tilsættes bromthymolblåt som indikator. Bromthymolblåt er blåt, når der er NaOH tilstede og gul, når HCl er tilstede. Når der er vand og NaCl tilstede, vil opløsningen være grøn.

Formål

Formålet er at bestemme en ukendt koncentration af NaOH.

Sikkerhed

Opløsningerne må ikke indtages. Både NaOH og HCl er ætsende, og man skal derfor undgå at få stofferne på huden og tøjet. Derfor skal I have kitler på. Hvis man får enten NaOH eller HCl på huden, skylles der med vand hurtigst muligt.

Materialer

1. NaOH (ukendt koncentration)
2. 0.1M HCl
3. Bromthymolblåt
4. 2 bægerglas 100 mL
5. Plastpipette
6. Glaspipette
7. Spatel
8. Burette
9. Tragt
10. Pipettefylder
11. Stativ
12. Burette-holder

Metode

Overfør 10,0 mL NaOH til et bægerglas med glaspipetten og dernæst 3 dråber bromthymolblåt og rør rundt med spatlen. Fyld buretten op med HCl, husk at lukke spidsen. Fastsæt buretten i stativet. Sæt derefter det andet bægerglas under og åben let, så der ikke er luft i bunden. Når buretten er klar, sættes bægerglasset med NaOH under, og der tilsættes lidt HCl ad gangen og rør rundt med spatlen. Når væsken skifter farve fra blå til grøn, stoppes titreringen, og det tilsatte volumen HCl bliver noteret. Forsøget kan evt. gentages, hvis der er tid.

Resultatbehandling

Notér først det tilsatte volumen af HCl i tabellen og beregn derefter koncentrationen af NaOH.

	Titrering 1	Titrering 2
V(HCl)		
n(HCl)		
n(NaOH)		
c(NaOH)		

Tabel 3.2: Tabel til notering af tilsat volumen og beregning af koncentration ved titrering

3.7 Øvelse: Metodisk identifikation

Vi er blevet givet 6 forskellige opløsninger. Vi ved, hvad de er, men hvilken er hvilken? Opløsningerne er:

1. $CuSO_4$
2. Na_2CO_3
3. HCl
4. $AgNO_3$
5. $Ba(NO_3)_2$
6. NaCl

Formål

Formålet er at kunne bestemme, hvad reagensglas a, b, c, d, e og f indeholder

Sikkerhed

Ingen af opløsningerne må på noget tidspunkt indtages. HCl er ætsende og skal undgås at få på huden. Fås det på huden, skal huden vaskes inden for et minut.

Metode

Få dråber af prøven tilsættes en saltindikator og reaktionen observeres. Saltindikatorene er som følger

- HCl
- Na_2SO_4
- pH-papir
- NaOH

Et par brugbare reaktioner

$$2\,HCl(aq) + Na_2CO_3(aq) \longrightarrow 2\,NaCl(aq) + H_2O(l) + CO_2(g)$$

$$Cu(OH)_2(s) + NaOH(aq) \longrightarrow [Cu(OH)_4]^{-}(aq) + 2\,Na^{2+}$$

Tabel 3.3: Tabel til observationer fra fældningsforsøget.

	a	b	c	d	e	f
HCl						
Na_2CO_3						
pH						
NaOH						

I den følgende tabel kan I skrive jeres bud på, hvad hver opløsning er:

Tabel 3.4: Tabel til svar

Nummer prøve	Bogstav	Stof
1		
2		
3		
4		
5		
6		

3.8 Opgaver

Opgave 3.8.1: Fritz Haber
Captain Americas første fjender er den tyske general Johann Schmidt og videnskabsmanden Arnim Zola. Zola er baseret på den tyske videnskabsmand Fritz Haber, der foruden sin indblanding i 1. verdenskrig opfandt den industrielle metode til at lave gødning efter følgende reaktion

$$N_2 + H_2 \longrightarrow NH_3$$

1)Afstem reaktionen

Zola skal bruge ammoniakken til at lave salpetersyre HNO_3, til det skal han bruge 2 mol ammoniak.

2)Kan han lave det ud fra 2,1 mol N_2 og 2 mol H_2 når det antages, at reaktion forløber 100% ?

3)Hvor mange mol N_2 og H_2 bruge for at fremstille 15 mol NH_3
For at Zola skal kunne lave Salpetersyre, bruger han en proces, hans gode ven Ostvald har lavet.

$$NH_3(g) + O_2(g) + H_2O(l) \longrightarrow H_2O(g) + HNO_3(aq)$$

4)Afstem reaktionen

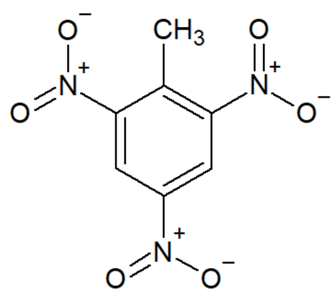
5)Hvor mange ml 17 M HNO_3 fremstilleler Zola ud fra 15 mol NH_3.

Grunden til, at Zola gerne vil bruge salpetersyre, er for at kunne lave TNT, den overordnede reaktion er som følger:

$$C_7H_8 + HNO_3 + H_2SO_4 \longrightarrow C_7H_5(NO_2)_3 + HSO_4^- + H_3O^+ \qquad \{3\}$$

6)Afstem reaktionen

7)Hvor mange kg TNT($C_7H_5(NO_2)_3$) får Zola lavet ud fra 4,1 kg toluen (C_7H_8)).



Figur 3.7: Sturktur af TNT

Opgave 3.8.2: Flussyre
Black Panthers rustning er lavet af det fiktive metal vibranium, som er modstandsdyg-

tigt overfor næsten alt. Hvis vibranium skulle opløses i noget, ville det være flussyre, som kan fremstilles således

$$CaF_2 + H_2SO_4 \longrightarrow HF + CaSO_4$$

1) Afstem reaktionen.

For at kunne opløse Black Panther's rustning skal der bruges 129 mol HF.

2) Hvor mange gram CaF_2 skal der opløses i et kar med H_2SO_4?

3) Hvor mange gram $CaSO_4$ bliver der dannet, når der er blevet produceret nok HF til at fjerne Black Panthers rustning?

●●● Opgave 3.8.3: Forbrænding

Iron mans rustning kan flyve. Dette lader sig gøre med jetmotorer, der er monteret i hænder og fødder. Rustningen benytter tetraboran som brændstof, og forbrændingsreaktionen er som følger

$$B_5H_9 + O_2 \longrightarrow B_2O_3 + H_2O$$

1) Afstem reaktionen

●●● Opgave 3.8.4: Titrering

En opløsning af eddikesyre tilsættes NaOH. Når der er tilsat 18 mL 2 M NaOH, er der lige meget syre og base i blandingen. Hvad er stofmængden af eddikesyre i den originale blanding?

Hint:

Eddikesyre og natriumhydroxid reagerer efter følgende reaktionsskema

$$CH_3COOH + NaOH \longrightarrow CH_3COONa + H_2O$$

●● Opgave 3.8.5: Kjeldahl

Poison Ivy har været på spil igen. Hun har udført et terrorangreb, hvor der er blevet brugt en specifik plante til at forgifte med, dog kan Batman lave en modgift, men han skal kende plantens nitratindhold.

Til dette bruger han Kjeldal metoden. Nitraten omdannes til ammoniak, som der titreres på. Dette sker ved at bruge en aluminiumslegering, hvor der sker denne reaktion:

$$3\,NO_3^- + 8\,Al + 5\,OH^- + ?\,H_2O \longrightarrow 8\,[Al(OH)_4]^- + ?\,NH_3$$

1) Afstem reaktion for vand og ammoniak

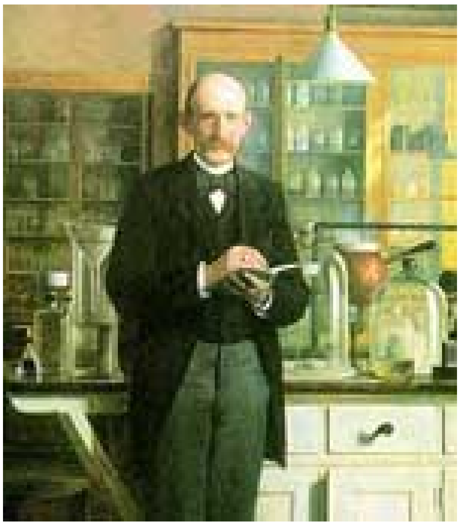
Titratoren er en NaOH lavet ud fra at opløse 25 g NaOH salt i 100 ml demineraliseret vand.

2) Beregn koncentrationen af titratoren

Når der titreres med NaOH, nås et ækvivalenspunkt, idet der er brugt 47 ml titrator.

3)Beregn stofmængden af brugt NaOH

4)Beregn stofmængden af nitrat



Figur 3.8: Maleri af den danske Johan Kjeldahl af Otto Haslund (kilde: Wikipedia:JohanKjeldahl)

•• Opgave 3.8.6: Chlorgas

Den forfærdelige Aldrich Killian er i gang med at producere klorgas til at gasse Iron Man. Dog kan han ikke bruge strøm, da Iron Man styrer al energiproduktion i hans by. Dog har han fundet en måde at producere klorgas på ved hjælp af denne reaktion:

$$HCl(aq) + MnO_2(s) \longrightarrow Cl_2(g) + MnCl_2(aq) + H_2O(l)$$

1)Afstem reaktionen

Efter reaktionen er forløbet, bliver $MnCl_2$ isoleret og vejet til at være 131 g.

2)Beregn stofmængden af $MnCl_2$

Undevejs i reaktionen er der blevet opsamlet en gul gas. Efter reaktionen måles trykket i beholderen til at være 2 bar, volumenet af beholderen er på 13 L.

3)Beregn stofmængden af Cl_2, passer dit svar med resultatet fra før?

Saltsyreopløsningen blev lavet ved at opløse 73 g saltsyregas i 250 ml demivand.

4)Beregn koncentrationen af saltsyre før reaktionen

Efter reaktionen er alt MnO_2 reageret.

5)Beregn massen af MnO_2 brugt til reaktionen

6)Beregn koncentration af saltsyre, efter reaktionen har forløbet til ende

•• Opgave 3.8.7: BF_3

Iron Man er blevet lidt irriteret over, at han ikke kan bruge noget af det dannede B_2O_3 til noget.

Derfor har han fundet en måde at omdanne B_2O_3 til BF_3.

$$B_2O_3 + 3\,CaF_2 3\,H_2SO_4 \longrightarrow 2\,BF_3 + 3\,CaSO_4 + 3\,H_2O$$

Iron Man bruger 2 mol B_2O_3, 0,4 L 18 M H_2SO_4 og 390 g CaF_2

1)Hvor meget BF_3 får Iron Man dannet, når reaktionen forløber eller til, at en af reaktanterne forbruges fuldstændig? og hvilken reaktant er den begrænsende faktor?

Iron Man har undersøgt, hvad man kan bruge BF_3 til. Han fandt frem til, at han skal bruge det til at lave $B(OH)_3$, hvilket han gør ud fra følgende reaktion:

$$4\,BF_3 + 6\,H_2O \longrightarrow 3\,H_3O^+ + 3\,[BF_4]^- + B(OH)_3$$

På grund af en borgerkrig er Iron Man kommet i konflikt med Antman, og da $B(OH)_3$ kan bruges som myregift, er det perfekt mod Antman. For at uskadeliggøre Antman, skal der bruges 349 g $B(OH)_3$.

2)Hvor mange mol BF_3 skal der bruges for at danne 349 g B(OH), når der bruges et overskud af vand?

Iron Man opbevarer BF_3 i trykflaske, der har et volumen på 1,6 L, et tryk på 15 bar, og Iron Man bruger 5 af denne type flaske til at producere 349 g $B(OH)_3$.

3)Hvad er temperaturen af trykflaskerne?

Kapitel 4

Biologi

4.1 Introduktion

I dette kompendium forsøges det at sætte læseren ind i nogle dele af biologien og give nogle redskaber til videre arbejde med biologi. Dette er ikke et direkte billede af, hvad biologi på gymnasiet er, da faget biologi ofte er et sekundært fag og derfor bliver drejet i forhold til studieretning. Biologien i dette kompendium skal derfor ses som en repræsentation af biologi, når den står alene, men det er vigtigt at huske, at der ligesom med andre fag kan være både sjove og kedelige sider! Hvis der opstår tvivl omkring enten kompendiet eller biologi på gymnasiet, kan underviserne altid spørges.

Biologien er studiet af alt levende. Det omfatter både dyrs adfærd og anatomi, planters opbygning, svampe, små bakterier, mekanismer i celler og klimaet. På den her camp vil der blive fortalt om frugter, fylogeni og blæksprutter samt bakterier.

4.2 Frugter

Hvad tænker man på, når man siger "frugt"? Måske tænker man på et æble eller en pære, eller måske en vandmelon. Man tænker hvert fald på noget sødt og friskt, men der er faktisk flere frugter, der ikke kan spises og en del frugter, som man til hverdag kalder for grøntsager.

Definitionen på en frugt er: en enhed der gror ud fra en blomst på en plante. Altså er alt, der gror fra en blomst, er en frugt. Planten bruger frugten til at sprede sine frø, men strategien er forskellig, alt efter hvilken type frugt, det er. Der findes fire typer frugter, og de kan ses i tabel 4.1.

Tabel 4.1: Forskellige frugttyper

	Tør	**Våd**
Mange Frø	Kapsel	Bær
Få frø	Nød	Stenfrugt

Ud fra tabellen kan vi tage tomatplanten som et eksempel. En tomat gror der, hvor blomsten sad, og der er frø i, og derfor er det en frugt. En tomat er våd, og derfor må det enten være et bær eller en stenfrugt.

Tomater har også mange frø og må derfor være et bær. Et eksempel på en kapsel er en ært eller en kapsel med birkesfrø i. Der er også nogle gange beskrevet en femte frugttype, der kaldes kernefrugt. Det er for eksempel æbler og pærer, som kan være svære at putte i en af de andre kategorier.

De fleste frugter er delt op i tre dele. Exocarpen er yderst – den svarer til skindet på en blomme. Mesocarpen er i midten – den svarer til den søde, bløde del af en blomme. Endocarpen er inderst – på en blomme svarer det til stenen. Inde i endocarpen ligger frøet, som består af en frøskal, en frøhvide og kimen, som er "selve frøet", altså det der spirer og bliver til en ny plante[9].

Opgaver

Opgave 4.2.1:

1) Hvilken slags frugt er en hasselnød?

2) Hvilken slags frugt er en mandel?

3) Hvilken slags frugt er en agurk?

Figur 4.1: Frugter

Opgave 4.2.2:

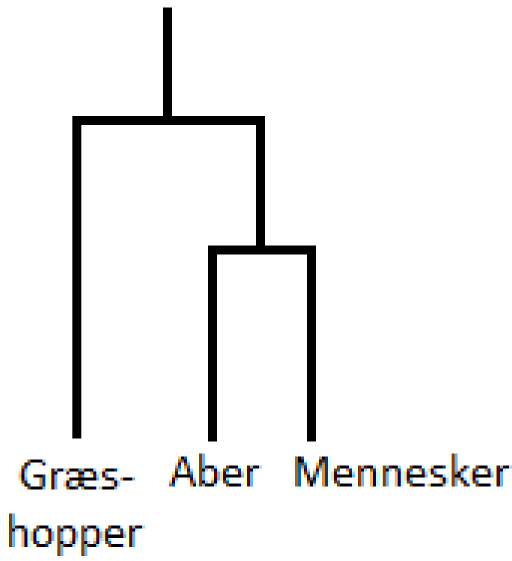
Som nævnt før bruges frugter til at sprede frø. Planter med bær håber, at et dyr kommer og spiser deres frugter, når de er modne, og frøene i frugten passerer så igennem fordøjelsen og bliver skidt ud igen – oven i købet med ekstra gødning. Hvilke strategier kunne de andre frugter gøre brug af?

Opgave 4.2.3:

Frøet består af en skal, en hvide, og en kim. Hvilke funktioner kunne de tre dele have?

4.3 Fylogeni

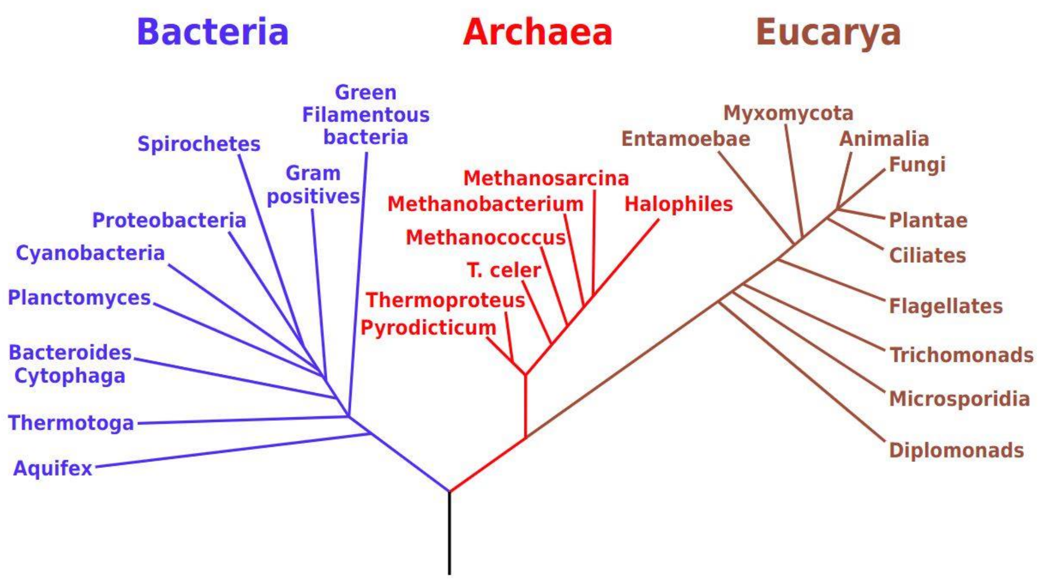
Fylogeni er studiet af slægtskab. Det er dog ikke slægtskabet mellem individer, men slægtskabet mellem arter eller grupper af organismer. Derfor kan vi med fylogenien se på, hvordan forskellige arter er udviklet igennem tidens løb i forhold til hinanden. For eksempel kan vi undersøge slægtskabet mellem mennesker, aber og græshopper. Der vil man finde, at mennesker er nærmere beslægtet med aber, end vi er med græshopper. Når man taler om fylogeni, kan det dog være svært at visualisere, hvis bare man beskriver slægtskabet, og derfor er fylogeni næsten altid afbildet i fylogenetiske træer. Det fylogenetiske træ for mennesker, aber og græshopper kan ses på figur 4.2.



Figur 4.2: En fylogeni over slægtskabet mellem græshopper, aber og mennesker.

Ud fra dette træ kan det ses, at aber og mennesker er nærmere beslægtet med hinanden end med græshopperne, fordi stregerne mødes tidligere. Man kan forestille sig, at jo længere op ad figuren man går, jo mere tilbage i tiden går man. Der, hvor stregerne fra aber og mennesker mødes, kaldes den sidste fælles stamform for aber og mennesker.

Livets træ er et populært navn for et fylogenetisk træ, der beskriver alle kendte organismer. En version af livets træ kan ses på figur 4.3. Det viser meget overordnede kategorier i stedet for mindre grupper eller arter.

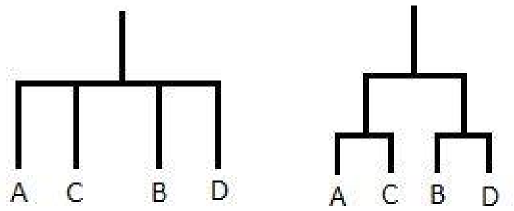


Figur 4.3: Livets fylogenetiske træ

Generelt deler man alle former for liv i de tre riger: bakterier, arkæer, og eukaryoter. Animalia – dyr, Fungi – svampe, og Plantae – planter, er nok de mest kendte navne på dette træ, og de kan alle findes under eukaryoterne. En anden meget vigtig gruppe på dette træ er cyanobakterierne. Selvom de er bakterier, er de de første fotosyntetiserende organismer på Jorden.

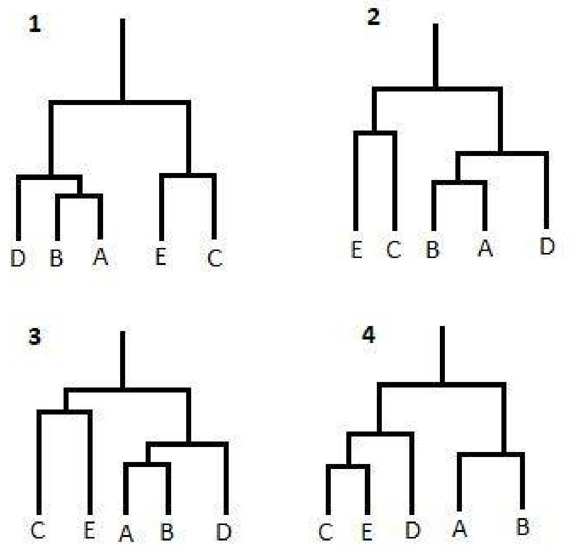
Opgaver

Opgave 4.3.1:
Hvad er forskellen mellem slægtskabet på arterne A, B, C, og D i de fylogenetiske træer på figur 4.4:



Figur 4.4:

Opgave 4.3.2:
Hvilke af de fylogenetiske træer i figur 4.5 viser den samme fylogeni - slægtskab?



Figur 4.5:

Opgave 4.3.3:
Tegn et fylogenetisk træ ud fra følgende beskrivelse: Art C er tættest beslægtet med art A. Art D er tættere beslægtet med art A end med art B. Art E er tættest beslægtet med art D.

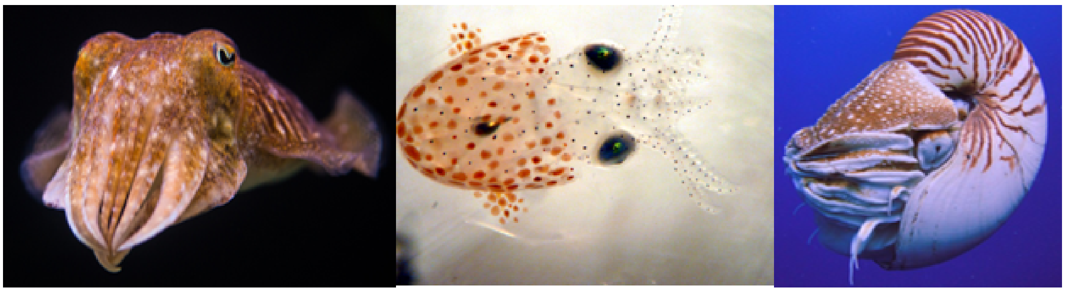
4.4 Blæksprutter

De mest populære historier omkring blæksprutter handler om gigantiske eksemplarer som for eksempel Kraken. Disse blæksprutter kom op af dybet og kastede sig over skibe og dræbte alle om bord.

Figur 4.6: Kraken, den ottearmede blæksprutte

Men disse historier kan også have haft noget bund i virkeligheden. Blæksprutten på figur 4.6 er en ottearmet blæksprutte, men en af de største blæksprutter, der er blevet målt, er en tiarmet blæksprutte – kæmpeblæksprutten – der kan blive op til 18 m lang. Til sammenligning er Rundetårn 35 m, så der skal kun to kæmpeblæksprutter til at nå op på toppen af Rundetårn. Der findes også kolossalblæksprutten, som er endnu større, men der er ikke blevet fanget nok af dem til at kunne sige noget om deres generelle størrelse. Kæmpeblæksprutten befinder sig helt ned til 600 m dybde, mens kolossalblæksprutten højst sandsynligt jager endnu længere nede. En normal ubåd dykker kun 250 m ned.

De blæksprutter, man normalt beskæftiger sig med, er typisk ikke så store, men de er mindst lige så spændende. På figur 4.7 herunder kan det ses, hvor mange forskellige typer af blæksprutter der findes ud over de tiarmede og ottearmede blæksprutter.



Figur 4.7: fra venstre: cuttlefish (engelsk), cuttlefish (engelsk), nautilus

Blæksprutter er bløddyr og hedder på latin Cephalopoda. De er karakteriseret ved at have et antal fangarme omkring munden, som de bruger til at fange og håndtere deres bytte. Blæksprutter er kendt som utrolig intelligente dyr, og de har været på Jorden meget længe. Blæksprutter har cirka det samme antal neuroner – nerveceller – som en hund, og to tredjedele af dem er placeret i deres arme, mens en tredjedel er formet som en donut og ligger rundt om spiserøret.

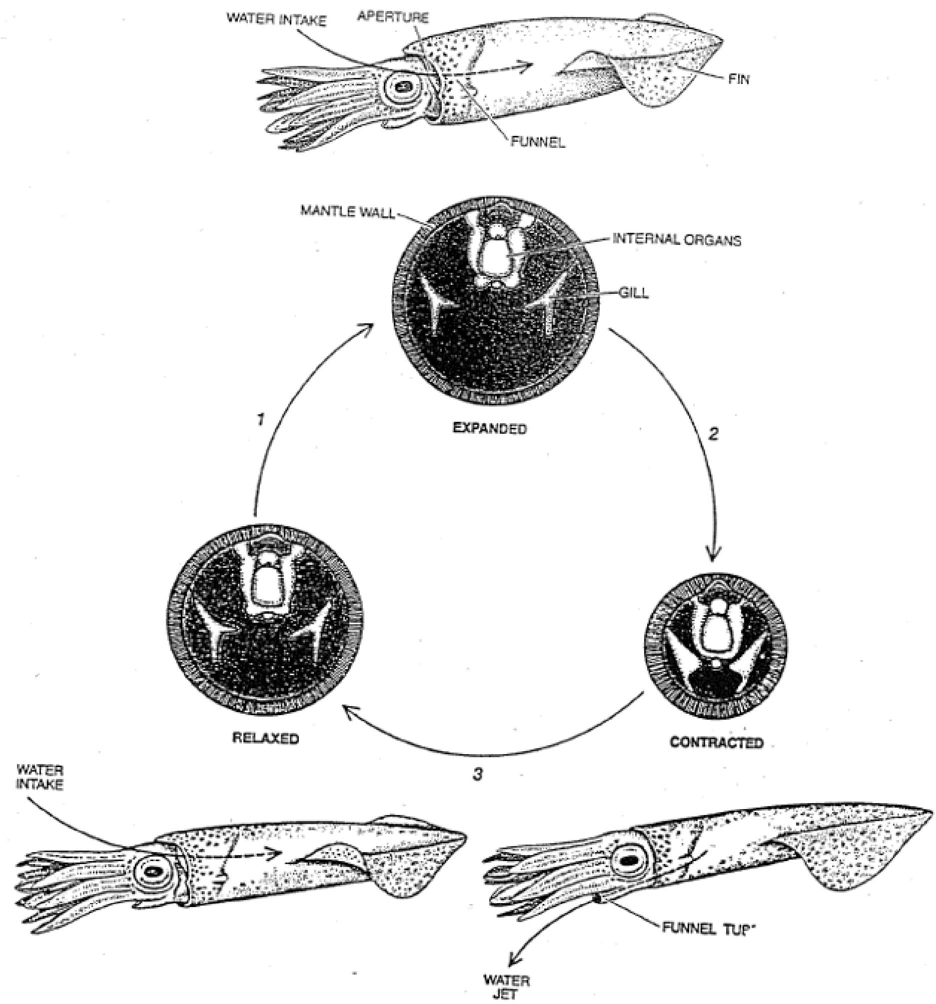
Et vidne om blæksprutters kløgtighed kan findes, hvis man læser historien om et akvarium, som ikke kunne forstå hvorfor fiskene i deres ene akvarium forsvandt. Efter at have installeret et overvågningskamera fandt man ud af, at blæksprutten i akvariet ved siden af hver aften kravlede ud af sit eget akvarium og ned i fiskenes for at spise, hvorefter den kravlede tilbage til sit eget akvarium og lukkede låget efter sig, så de ansatte ikke skulle ane uråd.

De tiarmede blæksprutter og Loligo

De tiarmede blæksprutter har i alt 8 arme og 2 tentakler, der er placeret rundt om munden. På indersiden af armene og yderst på tentaklerne sidder der sugekopper på små stilke, som blæksprutten bruger til at holde byttet fast med. Sugekopperne er et lille bæger af muskler og har små tænder i kanten.

Overalt på blæksprutter kan man finde små rød-brune pletter. Det er kromatoforerne. De står for farveskiftet i blæksprutter og kontrolleres af nervesystemet. Når blæksprutten spænder sine muskler, bliver den mørkere, og når den slapper af, bliver den lysere. Der er også små, hvide, reflekterende iridocyter. De er på finnernes lyse underside. Kroppen er strømlinet i begge ender, så længe armene holdes samlet, og langsomme bevægelser kan laves ved at bevæge de trekantede finner.

De tiarmede blæksprutter kan dog også bevæge sig utrolig hurtigt. Det gør de ved at lade vand flyde ind i deres kappe, og derefter trække sig hurtigt sammen. Det gør, at vandet skydes ud af deres siphon som en jetstrøm, og de bliver skudt fremad i vandet. Mekanismen kan ses i figur 4.8 herunder. Loligo kan accelerere fra hvile til en fart på 2 m/s ved hjælp af en enkelt sammentrækning. De hurtigste tiarmede blæksprutter kan endda skyde sig selv op af vandet og "flyve".



Figur 4.8: Her kan ses en tegning over, hvordan de ti-armede blæksprutter bevæger sig

Anatomi

- **Øjne:**
  Blæksprutternes øjne er meget lig vores egne og har også en linse, der dog ikke er formet som vores. Den er hård og sidder inde i øjet. Blæksprutter kan se forskel på lys og mørke og danner sig et komplet billede af, hvad de ser på ligesom os, men de kan ikke se farver.

- **Radula:**
  Radulaen bliver på dansk også kaldt for raspetungen og er et træk, blæksprutten har tilfælles med andre bløddyr [10]. Den bruges til at findele føden og holde det fast, så det ikke falder ud af munden på blæksprutten.

- **Det reproduktive system:**
  Hunlige blæksprutter har ovarier og nidamentale kirtler, og hanlige blæksprutter har testikler. Ovarierne bærer æggene og er lidt gullige og slimede. De nidamentale kirtler gør æggene hårde, inden de skal ud i vandet gennem æggelederne, så der er større chance for, at de overlever. Testiklerne ligger i hannerne det samme sted som ovarierne i hunnerne, men er slankere, og væsken i dem er mere flydende og hvidlig.

- **Spiserøret:**
  Spiserøret går fra næbbet ned til maven og har til formål at føre maden og starte nedbrydelsen. På vejen går den igennem den donut-formede hjerne, hvilket også er grunden til, at blæksprutten ikke kan spise for store stykker af mad, da det ellers ville sætte sig fast i hjernen.

- **Maven:**
  I maven foregår størstedelen af madens nedbrydelse. Det er en oval struktur, der sidder mellem spiserøret og maveblindsækken. Maveblindsækken, tarmen, og anus: Maveblindsækken er foldet for at få så stort et overfladeareal som muligt til optagelse af den nedbrudte føde. Fra maveblindsækken løber resten af maden gennem tarmen og op til anus, som har sin udmunding oppe ved siphonen. Restprodukter bliver skyllet væk gennem siphonens vandstrøm.

- **Blæksækken:**
  Blæksækken ligner en lille sort streg og indeholder blækspruttens blæk. Blækket sprøjtes ud af siphonen, når blæksprutten føler sig truet, og ved hjælp af kromatoforerne skifter blæksprutten farve, så den matcher blækket.

- **Gæller:**
  Gællerne er hvide fjerlignende strukturer, der gør, at blæksprutterne kan trække vejret under vandet ligesom fisk. Når vand kommer ind i kappen, bruges gællerne til at trække ilt ud af vandet og smide CO_2. De er foldet, så de får så stort et overfladeareal som muligt.

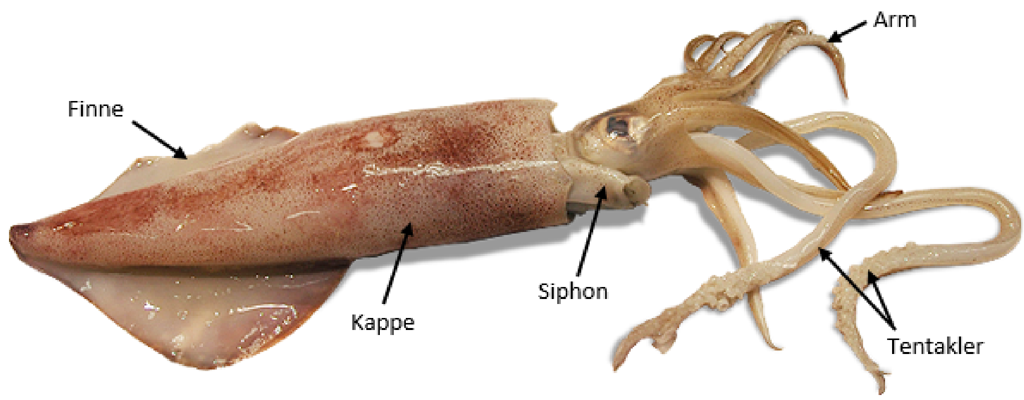
- **Hjerter og nyrer:**
  En blæksprutte har tre hjerter. To gællehjerter der sidder ved foden af hver gælle og pumper blodet fra kroppen op i gællerne, og et hjerte der pumper blodet fra gællerne rundt i kroppen. Blodet i en blæksprutte er farveløst og bliver blåt, når det kommer ud i luften. Det er fordi, det bruger det kobberholdige hæmocyanin i stedet for hæmoglobin til at transportere ilt. Nyrens funktion er blandt andet at rense blodet for affaldsstoffer og er i blæksprutten placeret oven på hjertet.

- **Hjernen:**
  Hjernen er som nævnt før stærkt udviklet i blæksprutter. Den er placeret imellem øjnene og ligger rundt om spiserøret.

- **Gladius:**
  Blæksprutten bliver holdt stiv af en fjerformet skal – gladius – der sidder i kappen. Det er hvad, der er tilbage af dens forfædres hårde ydre skal. [11]

4.5 Dissektionsvejledning

Denne vejleding beskriver trinene i dissektionen af en tiarmet blæksprutte (Loligo)



Figur 4.9: Loligos ydre morfologi

Loligos ydre morfologi

1. Se på huden: overalt er der rødbrune pletter, det er kromatoforerne. Man kan måske også se hvidlige pletter på den lyse underside af finnerne. Det er iridocyter.

2. Se og mærk på tentaklerne, armene og deres sugekopper.

3. Tentaklerne er nogle gange trukket tilbage i lommer under øjnene. Skær lommerne op for at se, hvor lange tentaklerne er.

Indre morfologi

4. Se på siphonen – den har en mekanisme, der gør at vand ikke flyder ind igennem den. Hvorfor det?

5. Læg blæksprutten på ryggen og skær eller klip kappen op. Den mørke side er ryggen.

6. Skær siderne af kappen af, så de ikke er i vejen.

7. De organer, I kan finde i blæksprutten, kan ses på figurene 4.9 til 4.11 og er beskrevet i afsnittet 'Anatomi'. Prøv at se om I kan finde dem alle, men pas på med at prikke hul på blæksækken.

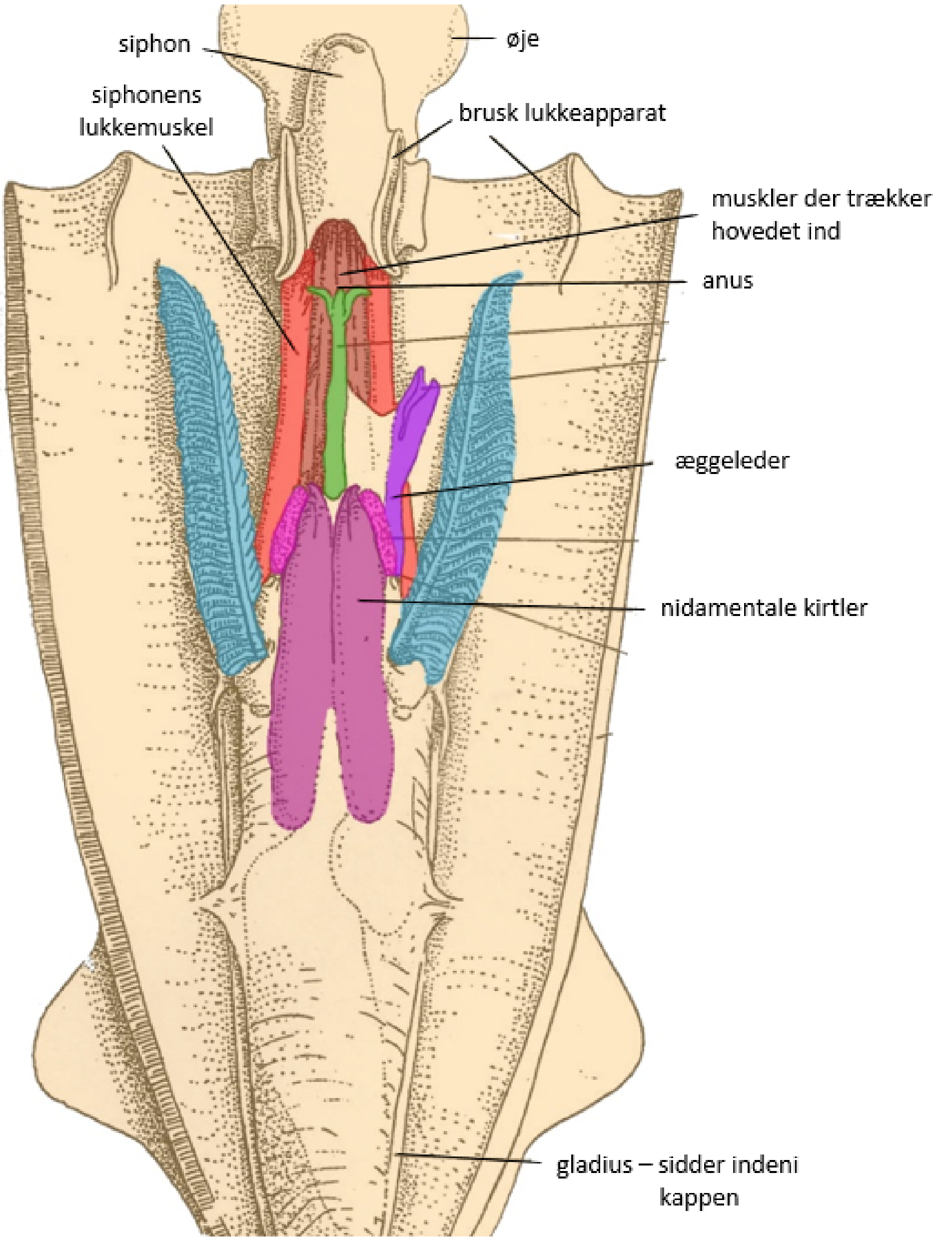
8. Vær opmærksom på, at nogle organer kun er i enten hunnerne eller hannerne. Hvilke organer er der tale om?

9. Prøv at finde et æg eller en sperm og kig på det i mikroskopet - spørg en underviser, hvordan man klargør sådan et præparat.

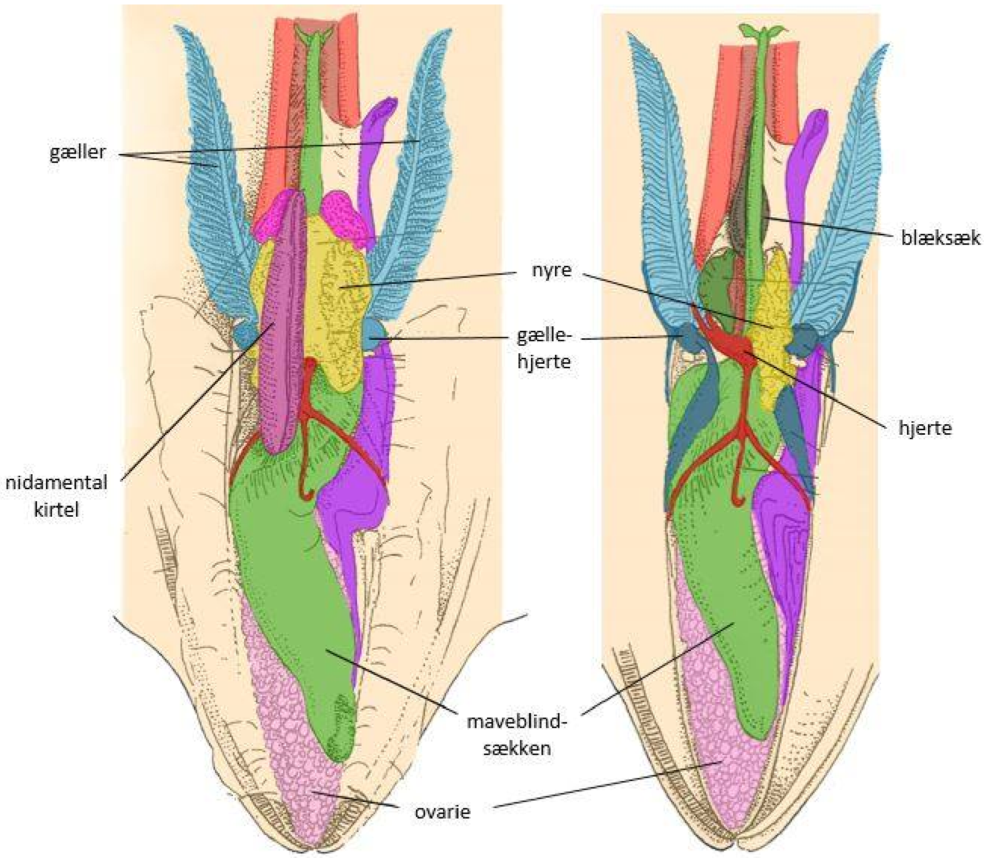
10. Hvis I skærer forsigtigt mellem øjnene, vil I kunne se hjernen.

11. Skær igennem øjet og se, om I kan finde linsen.

12. Inde i næbbet er radulaen, en form for ru tunge, som er meget svær at få fat på.

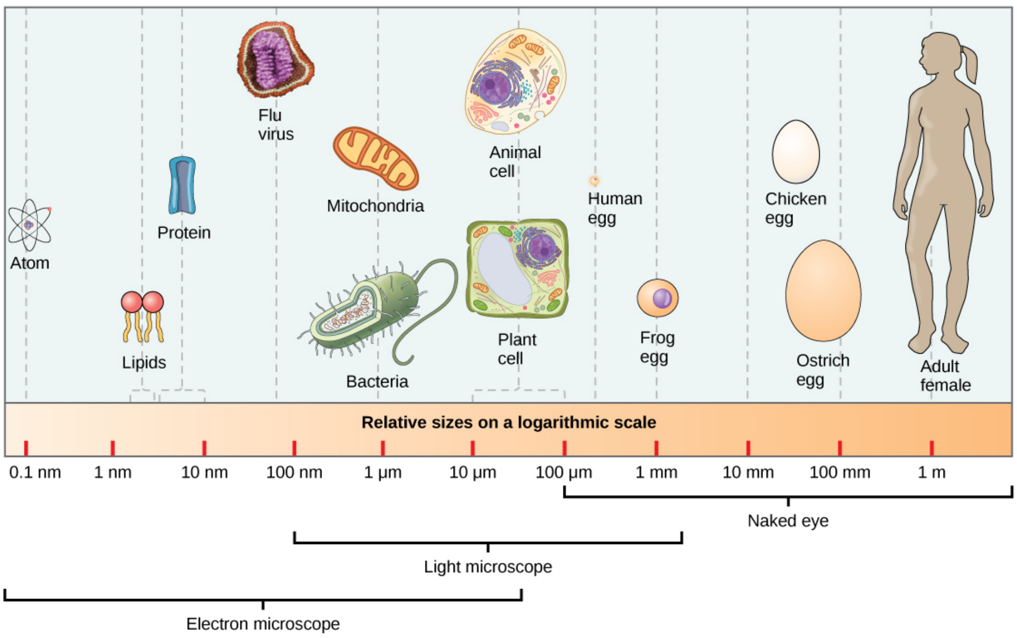


Figur 4.10: Loligos anatomi



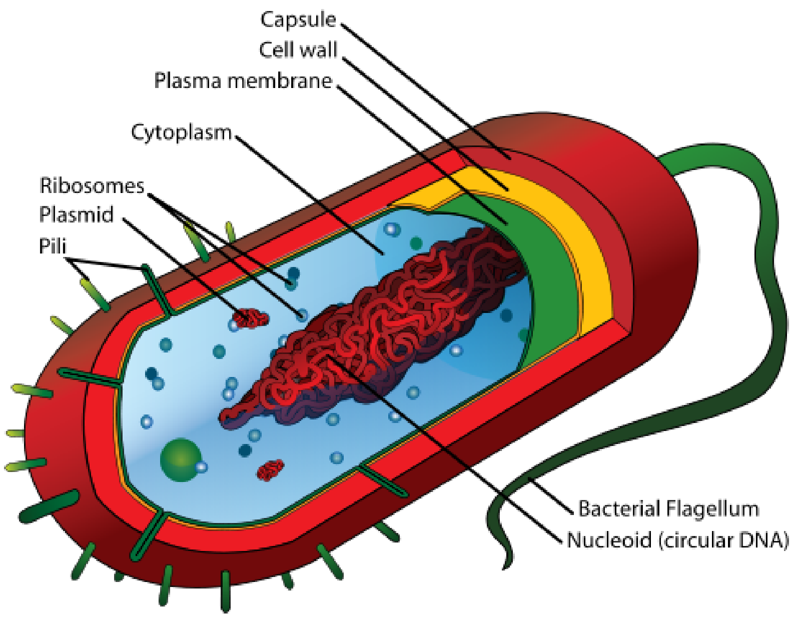
Figur 4.11: Loligos anatomi

4.6 Introduktion: Bakteriernes verden



Figur 4.12: Størrelses-skala til mikroskop kilde[12]

Bakterier er små, encellede organismer, der er omkring 0,5 til 5 mikrometer lange, hvilket er næsten 700.000 gange mindre end os. For at sætte det i perspektiv, så ville vi, hvis vi var 700.000 gange større, kunne nå fra Sverige til Belgien i én armsbredde. Bakterier er **prokaryoter**[1] , hvilket betyder, at de ikke har nogen cellekerne. Selvom at de er så små, så har de stadig en stor indflydelse på os og vores hverdag. En vigtig del af bakteriologien er at finde ud af hvilke bakterier, vi har fundet, uanset om de kommer fra en vandprøve eller beskidte fingre, og hvad de kan. Det er det, vi kommer til at arbejde med i det følgende.



Figur 4.13: prokaryotcelle kilde[13]

Bakterier er en yderst stor gruppe af organismer. Faktisk udgør de et helt kongerige (engelsk: kingdom), ligesom alle celler med kerner, eukaryoterne, tilhører ét kongerige. Herunder er der enormt mange under-kategorier, såsom proteobakterier, gram-positive bakterier, cyanobakterier og mange flere. Der er næsten ingen, der kan huske det hele, men her vil vi vise jer nogle af de mest kendte.

De bakterier, vi kommer til at arbejde med, er *Bacillus*, *Escherichia coli*, *Vibrio* og *Lactobacillus*. Hver af dem er forskellige, og det er super heldigt, siden vi har kommet til at bytte rundt på prøverne. Jeres opgave er derfor at bruge jeres nye viden til at bestemme hvilke bakterier, der er hvad.

Bakterie	Gram	Form	motilitet	Katalase	cytochrom
Bacillus	Positiv	Stave + spore	+	+	+
Escherichia	Negativ	Stave	+	+	+
Vibrio	Negativ	stave, buede	+	+	+
Lactobacillus	Positiv	stave	-	-	-

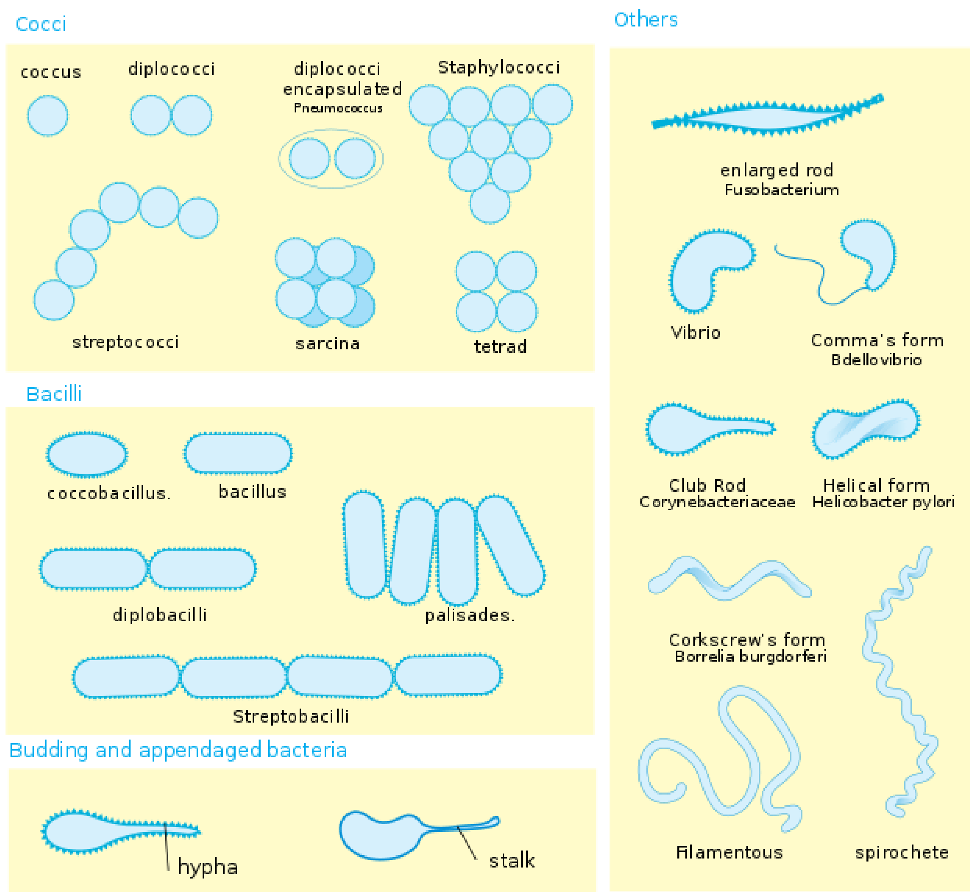
Tabel 4.2:

[1] “Pro”- kommer fra græsk og betyder “før” og “karyon” betyder “kerne”. En prokaryot er derfor en celle fra “før man havde kerne”

4.7 Forsøg 1: Form og cellevæg

Bakteriernes ydre

Først skal vi se på på det ydre af bakterierne. Hertil bruger vi mikroskoper til at komme til at se på bakterierne. På figur 4.14 kan vi se nogle forskellige former, som bakterier kan have. Som vi kan se, er der stor forskellighed mellem bakterier. For eksempel er mange af coccus[2] bakterierne meget runde, hvor bacillus[3] er mere aflang og oval.



Figur 4.14: Baktierer i forskellige former kilde ([14])

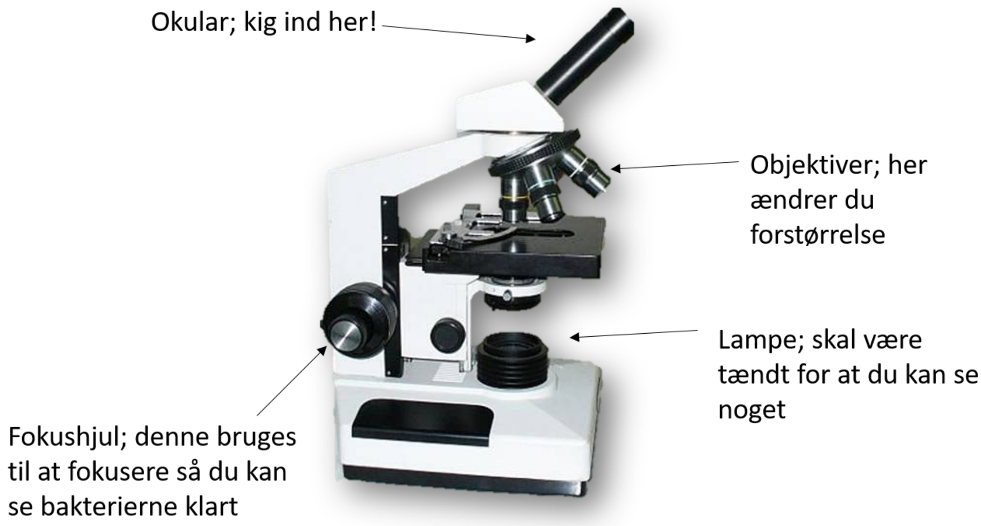
Motilitet

Foruden at have forskellige former, så kan nogle bakterier også bevæge sig, og nogle, såsom *Candidatus ovobacter propellens* med hastigheder helt op til 1 millimeter i sekundet! Det kan være rigtig praktisk at kunne bevæge sig hvis der ikke er så meget mad der, hvor bakterien er, så kan den bare svømme væk og finde et bedre sted. Det faktum at det kun er nogle bakterier, der kan bevæge sig, kaldet **motilitet** [4], kan bruges til at bestemme, hvilken bakterie der er hvem. Eksempelvis, så kan streptococci som regel ikke bevæge sig, men E. coli kan godt.

[2] "Coccus" kommer fra græsk og betyder "bær".
[3] "Bacillus" kommer fra latin og betyder "pind" eller "stav"
[4] "Motio" kommer fra latin og betyder "bevægelse"

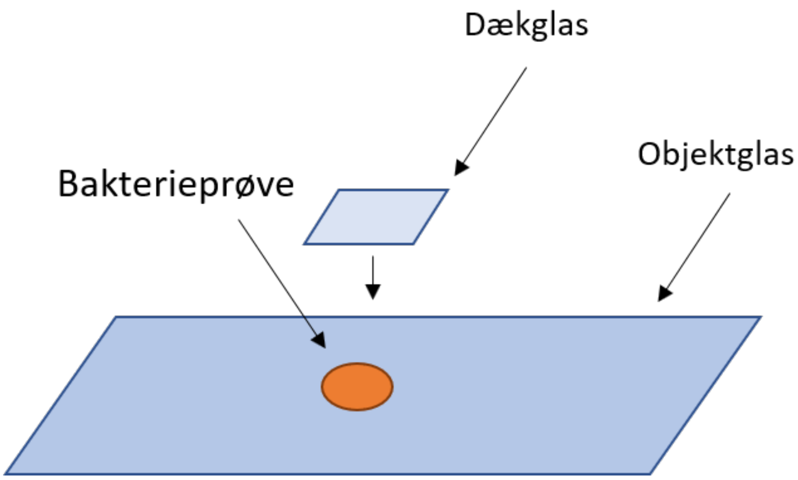
Forsøgsvejledning til mikroskopi

For at kunne se individuelle bakterier bliver vi nødt til at bruge et mikroskop, der som ved hjælp af lys og en række glaslinser kan forstørre billedet til noget som vi kan se med det blotte øje. For at kunne betjene et mikroskop har vi denne korte vejledning:



Figur 4.15: Mikroskop kilde [15]

Til sidst er det vigtigt at vide, at vi ikke putter vores bakterie-prøve direkte på mikroskopet, men derimod på et objektglas, hvor prøven mases sammen mellem objektglas og dækglas:



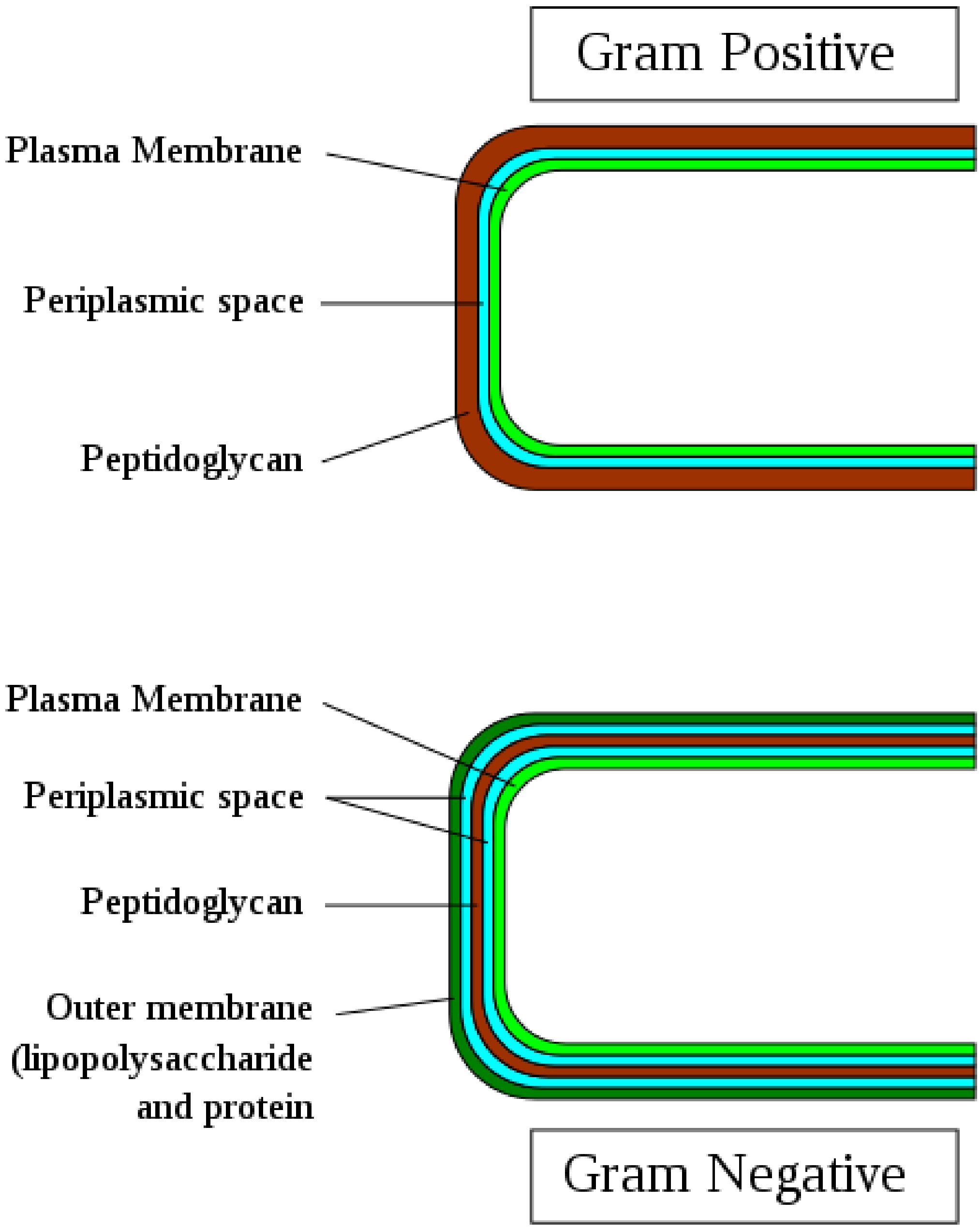
Figur 4.16: Skitse af brug af dækglas

Cellevæggen og Gram-farvning

Bakteriers ydre består af flere forskellige lag; en cellemembran ligesom humane celler, men hertil også en cellevæg og til tider en kapsel ligesom et frø. Ud fra bakteriernes opbygning af cellevæggen opdeler vi disse i to klasser; nemlig Gram-positive og Gram-negative. Den Gram-positive cellevæg består af en tynd plasma-membran, der ligger helt inderst med en tyk cellevæg af peptidoglycan udenpå. Dette lag af peptidoglycan virker som en slags afstiver, der gør cellerne hårde og gør, at de kan overleve et hårdt miljø.

De Gram-negative bakterier har en lidt mere kompliceret cellevæg. Her er der også et peptidoglycan-lag, men dette er som regel tyndere (sammenlignet med de gram-positive), og cellerne er også omgivet af en ydre membran.

Vi kan bruge forskellene i det yderste lag til at bestemme, hvilken bakterie vi har. Ved at tilsætte et farvestof, der binder sig til peptidoglycan, der udgør den hårde del af cellevæggene, så kan vi skelne mellem typerne. Det betyder, at de Gram-positive bakterier vil blive farvet, og at de Gram-negative bakterier ikke vil blive farvet.



Figur 4.17: Gram-negativ og Gram-positiv, kilde [16]

Forsøgsvejledning til Gram-farvning

For at undersøge om vores bakterier er gram-positive eller -negative kan vi udføre en gram-farvning. Da stofferne, som vi bruger til dette forsøg, er giftige, skal man huske den nødvendige beskyttelse - i dette tilfælde kittel og handsker, jeres undervisere vil udføre forsøget, da nogle af reagenserne er carcinogene (kræftfremkaldende).

- Frisk bakteriekultur udtværes på et objektglas, mærk med blyant i stedet for tusch, da senere behandling fjerner tusch, men ikke blyant.
- Objektglas lufttørres (helt tørt!) og flamme-fikseres, så senere ethanol-vask ikke fjerner bakterierne fra glasset
- Objektglas nedsænkes i krystalviolet-opløsning i 1 min.
- Objektglas skylles med vand i 3-4 sekunder for at fjerne overskydende opløsning
- Objektglasset sættes i en jodopløsning i 1 min for at fiksere stainet
- Efter fiksering skylles glasset med 96% ethanol indtil, at der ikke fjernes mere farve, herefter afskylles glasset med vand
- Som kontrast til krystalviolet farver vi herefter med erythrosin i 2 min
- Til sidst skyller vi igen med vand og lader objektglasset tørre

Herefter vil gram-positive kolonier kunne ses blåfarvede, imens gram-negative vil være lyserøde

Forsøgsvejledning til 3% KOH-test

En anden måde at undersøge om en bakterie er gram-negativ eller -positiv er at teste deres evne til at overleve visse typer stress. Vi bruger en svag opløsning af kaliumhydroxid, som dræber gram-negative, men som gram-positive godt kan overleve.

- Anbring en dråbe 3% KOH på et objektglas
- Fisk et par kolonier op fra de udleverede plader med en podenål og bland dette i dråben
- Omrør dråben i 1 minut, fjern derefter forsigtigt podenålen

Hvis din koloni var gram-negativ vil man kunne se, at dråben bliver mindre flydende og lettere skyet og man vil med et kapillarrør kunne udtrække strenge af DNA. Gram-positive i modsætning ændrer sig ikke under behandlingen, da deres cellevæg medvirker, at de kan overleve kaliumhydroxiden.

4.8 Forsøg 2: Interne processer

Det er ikke kun det ydre, der er interessant ved bakterier. Faktisk, så er det, der sker på indersiden, mindst lige så spændende at undersøge. Her støder vi dog på nogle udfordringer, idet vi selv med et lysmikroskop slet ikke kan se det, vi undersøger - maskinerne, som driver processerne, er nemlig omkring 5 nanometer i diameter (læs: meget, meget lille). Vi bliver derfor nødt til at finde på nogle andre metoder til at se, hvad der sker. Til dette formål kan vi bruge enzymerne, der findes inde i bakterierne, til at starte kemiske reaktioner, som vi kan se.

Metabolisme

Metabolismen[5] er den overordnede omsætning i organismer. Ordet "stofskifte" beskriver det samme på dansk, men vi kommer til at bruge den engelske/internationale betegnelse, da det er den, I kommer til at møde i det meste undervisningsmateriale, der omhandler mikroorganismer.

Når vi ser på cellers metabolisme, kan vi se, at der er en del reaktioner, der er vigtige for alle organismer. Disse reaktioner kaldes ofte for "Den primære metabolisme" eller "grundlæggende metabolisme", da den er absolut nødvendig for overlevelse hos alle celler. Heriblandt er reaktionerne, der omdanner sukker til energi og opbygning af vigtige molekyler såsom proteiner, kulhydrater, og fedt. Herefter har vi den sekundære metabolisme. Her finder vi reaktioner, som ikke er absolut nødvendige for bakteriens overlevelse. Heriblandt er flere farvestoffer og antibiotika.

En anden vigtig forskel mellem forskellige grupper af bakterier er, hvorvidt de kan li' ilt. Hvis vi zoomer helt ud, så findes der to overordnede grupper i forhold til, om bakterierne har brug for ilt. Der er de **aerobe bakterier**, der har brug for ilt, og der er de **anaerobe bakterier**, der ikke har brug for ilt. Navnene kommer fra græsk, og deres oversættelse kan hjælpe med at huske, hvem der er hvem, da "aer" betyder "luft" og "an-" betyder "ikke". Når de sættes sammen, så har vi luft-bakterierne og ikke-luft-bakterierne.

Det er dog lidt mere kompliceret end som så. Der findes bakterier, som **kun** kan overleve, hvis der er ilt, og bakterier der **kun** kan overleve, hvis der ikke er noget ilt. Disse grupper giver vi tilnavnet **obligat**, da de kræver noget specielt for at overleve. Derudover findes der også bakterier, som ikke nødvendigvis har brug for ilt, men som godt gider at bruge det, hvis det er til stede. Disse kaldes **fakultative anaerobe bakterier** og står til forskel fra både de obligate aerobe og obligate anaerobe bakterier, idet de kan leve mange flere steder.

Vi kan udnytte forskellene i disse bakterier til at skelne mellem dem. Cytochrom C oxidase er et protein, der er involveret i forbrænding af sukker i organismer, der kan bruge ilt. Det findes derfor kun i de obligate aerobe bakterier, de fakultative anaerobe bakterer samt i de fleste gram-positive bakterier.

Forsøgsvejledning til cytochrom c oxidase test

Som nævnt ovenfor, så er cytochrom c oxidase en af de mange proteiner, som indgår i bakteriers metabolisme. Cytochrom c oxidase kan bruges til at skelne mellem de aerobe og anaerobe bakterier hos de gram-negative bakterier, men ikke i de gram-positive grundet ovenstående. Til testen bruger vi en engangstest; en strip papir med N,N,N,N-tetramethyl-p-phenyl-diamin-dihydrochlorid som under oxidation af f.eks. cytochrom c oxidase blive blå.

- Tag en bakterie-koloni op med en podenål og stryg den på test-strippen
- Et positivt resultat er en blåfarvning inden for 10 sekunder, imens en farvning efter 30 sekunder eller mere er negativ - så husk at holde øje med jeres test-strips!

Katalase

Enzymer er en gruppe af proteiner, der kan indgå i reaktioner inde i celler for at få tingene til at ske meget hurtigere. Uden dem ville liv, som vi kender det, se meget anderledes ud.

Katalase er et yderst vigtigt enzym, der findes i næsten alle levende organismer, der er udsat for ilt. Enzymets funktion er at omdanne meget reaktive ilt-holdige molekyler til noget mere ufarligt. Et eksempel på denne reaktion er nedbrydningen af hydrogenperoxid (H_2O_2) til vand (H_2O) og ilt (O_2). Katalase er en af de hurtigste enzymer, der findes på Jorden. Et enkelt enzym kan omdanne millioner af molekyler hvert eneste sekund!

[5] "metabole" kommer fra græsk og betyder "forandring"

Det er derfor, vi kan bruge det til at undersøge vores bakterier. Nogle af dem, vi har taget med, producerer nemlig ikke katalase selv, hvilket betyder, at vi kan skelne dem fra resten.

Forsøgsvejledning til katalase-test

I katalase-testen udnytter vi bakteriernes eget katalase i en reaktion med hydrogenperoxid. Katalase beskytter som sagt imod reaktive oxygener, som dem der f.eks. dannes under aerob metabolisme. Katalase kan derfor hovedsageligt findes hos de aerobe og fakultativt aerobe bakterier, som bruger aerob metabolisme, men ikke hos de anaerobe eller mikroaerofile bakterier[6] som enten ikke har brug for katalasen (anaerobe) eller bruger et alternativ (mikroaerofile). Vi har dog en undtagelse i mælkesyrebakterierne som på trods at være aerobe IKKE har katalase.

- Testen udføres ved at påføre en dråbe 3 % H_2O_2 til en koloni - direkte på ens agar-plade
- Ved et positivt test-resultat vil der komme små bobler eller skum, imens en negativ reaktion ikke danner nogle bobler.

[6]Mikroaerofile bakterier har brug for en lille smule ilt, men ikke alt for meget. De har oftest brug for luft med 2-10% ilt, hvilket er mindre end de ca. 21% ilt, der er i atmosfærisk luft

Kapitel 5

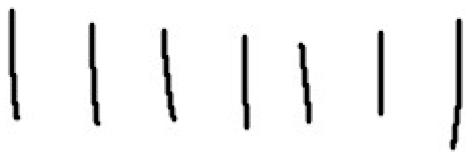
Datalogi

5.1 Introduktion og kort baghistorie til talsystemer

Et talsystem definerer et sæt af værdier, der bliver brugt til at repræsentere en mængde. Mennesket har talt ting lige så længe, det har eksisteret, og har af denne årsag ledt efter metoder for at holde styr på og for at kunne repræsentere disse ting, som mennesket har talt.

Tally marks

Da man i starten skulle tælle ting, så benyttede man sig af tally marks. Tally marks er den simpleste måde, hvorved man kan fremvise en mængde. Det foregår via streger:

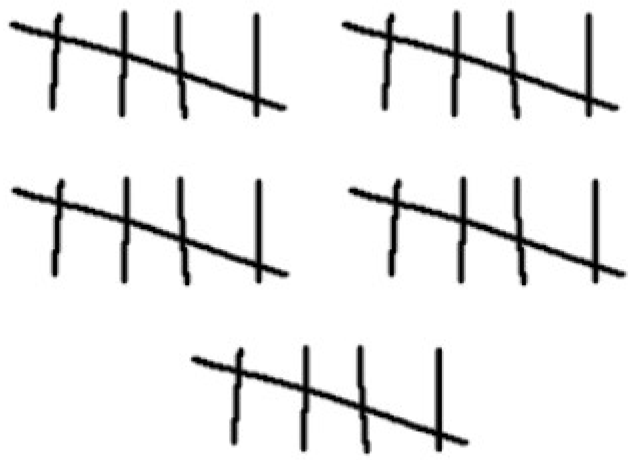


Figur 5.1: Her ses et eksempel på 7 tally marks

Tally marks er nemme og simple at forstå, men hvor det brillerer i simplicitet ved små mængder, så er det samme simplicitet, som gør store tal enormt langtrukne at se og forstå, når man benytter sig af tally marks. Da man først opfandt tally marks, så havde man ikke ord, der definerede mængder. Det decimale talsystem fandtes ikke, og de vidste derfor ikke, at der var 7 tally marks i billede 5.1, men de havde stadig en god fornemmelse for, hvad mængden af streger betød. 7 streger er ikke meget og er af denne grund nemt og hurtigt at forstå, men forestil dig i stedet, at du skulle finde frem til side 253 i en bog, hvor sidetallene stod med tally marks. Det ville være totalt uoverskueligt, og tage lang tid at finde frem til den korrekte side.

Figur 5.2: Et eksempel vi på 7 tally marks med gruppering

For at øge læsbarheden af tally marks begyndte man at benytte sig af gruppering. Et eksempel på dette ses på billede 5.2. Denne udvikling øgede markant hastigheden for forståelse af en tally mark mængde, og var en vigtig udvikling af talsystemet. Et andet eksempel ses herunder:



Figur 5.3: 5 grupper af 5 tally marks, i alt: 25

Tager man et kig på figur 5.3, kan man hurtigt regne sig frem til, at der er 25 tally marks i mængden.

Radix/base

Tally mark talsystemet kaldes på engelsk for et "unary numeral system", som med andre ord er et talsystem med grundtallet 1. Grundtallet af et talsystem, også kaldet dens radix eller base, definerer, hvor mange tal eller symboler, der bliver brugt til at repræsentere mængden. I teorien kan man opfinde et uendeligt antal talsystemer så længe, at man for radix N har N antal af symboler til at repræsentere mængden. Dette vil dog hurtigt blive for komplekst at arbejde med, da man eksempelvis ville skulle huske 200.000 forskellige symboler, hvis radix er 200.000. Af andre reelt anvendelige talsystemer kan dog nævnes: Det binære talsystem med radix 2, det oktale talsystem med radix 8, det decimale talsystem med radix 10, og det hexadecimale talsystem med radix 16.

Det decimale talsystem

Mennesket har i mange århundreder benyttet sig af det decimale talsystem, og en forklaring bag dette findes med stor sandsynlighed ved, at vi har 10 fingre og 10 tæer. Men hvordan fungerer det decimale talsystem egentlig? Det decimale talsystem har, som før nævnt, en radix på 10 og består derfor af 10 symboler. Disse symboler er: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9. Med disse symboler kan vi repræsentere enhver mængde, der ønskes. Det decimale tal 19.735_{10} består eksempelvis af de 5 symboler 1, 9, 7, 3 og 5, som har en forskellig værdi afhængig af deres position. Denne notation, også kaldet positionsnotation, er essentiel for vores forståelse af talsystemer, og fungerer på følgende måde:

Startende fra det mindst betydende ciffer i det decimale tal 19.735_{10} - dvs. 5 - findes den decimale talværdi (dette virker skørt nu, men vil give mening, når vi skal finde værdien af tal i andre talsystemer) ved at tage 5 og gange med radix^{N-1}, hvor radix er talsystemets grundtal og N cifferets position fra højre mod venstre. Gøres dette, fås:

Ciffer:	1	9	7	3	5
Position:	5	4	3	2	1
Potens:	$10^{5-1} = 10^4$	$10^{4-1} = 10^3$	$10^{3-1} = 10^2$	$10^{2-1} = 10^1$	$10^{1-1} = 10^0$
Potensværdi:	$10^4 = 10.000$	$10^3 = 1.000$	$10^2 = 100$	$10^1 = 10$	$10^0 = 1$
Positionsnavn:	Titusinder	Tusinder	Hundreder	Tiere	Enere
Regnestykke 1:	$1 \cdot 10.000 + 9 \cdot 1.000 + 7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 1$				
Regnestykke 2:	$10.000 + 9.000 + 700 + 30 + 5 = 19.735_{10}$				

Tabel 5.1: Visning af opbygningen af det decimale talsystem.

Med positionsnotation er det dermed muligt at genbruge det samme ciffer ved at tilføje en ny værdi til cifferet baseret på dets position i tallet. Dette er gældende for alle talsystemer, som vil blive introduceret.

Det binære talsystem

Elektronik benytter elektricitet for at kunne fungere. I al sin enkelthed kan elektricitet have to stadier. Tændt og slukket. Disse to stadier kan repræsenteres med 1 eller 0 – dette kaldes også for binær. Det binære talsystem har altså en radix på 2, og består af de to symboler 1 og 0 – også kaldet bit i det binære talsystem og ikke ciffer som i det decimale talsystem. Et binært tal kunne for eksempel se ud som følgende: $1101\ 1011_2$. Bemærk opdelingen hver fjerde bit. Dette kaldes en nibble og øger læsbarheden af binære tal. Tallet består af 8 bit – også kaldet en byte – og benytter sig af samme positionsnotation som det decimale talsystem.

Konvertering til decimaltal

Startende fra det mindst betydende bit – ikke ciffer - i det binære tal $1101\ 1011_2$ - dvs. 1 - findes den decimale talværdi ved at tage 1 og gange med radix^{N-1}, hvor radix er talsystemets grundtal, og N er cifferets position fra højre mod venstre. Gøres dette, fås: $1 \cdot 2^{1-1} = 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 1 = 1$

Ciffer:	1	1	0	1	1	0	1	1
Position:	8	7	6	5	4	3	2	1
Potens:	$2^{8-1} = 2^7$	$2^{7-1} = 2^6$	$2^{6-1} = 2^5$	$2^{5-1} = 2^4$	$2^{4-1} = 2^3$	$2^{3-1} = 2^2$	$2^{2-1} = 2^1$	$2^{1-1} = 2^0$
Potensværdi:	$2^7 = 128$	$2^6 = 64$	$2^5 = 32$	$2^4 = 16$	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$
Regnestykke 1	$1 \cdot 128 + 1 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$							
Regnestykke 2	$128 + 64 + 16 + 8 + 2 + 1 = 219_{10}$							

Tabel 5.2: Konvertering fra det binære talsystem til det decimale.

Det hexadecimale talsystem

Grundet binære tals simple repræsentation med kun to symboler bliver binære tal ofte store og svært læsbare. Det er her, det hexadecimale talsystem kommer ind og redder dagen. Hexadecimale tal er en menneskevenlig måde at repræsentere binære værdier, da hvert hexadecimalt ciffer svarer til fire bit – en nibble – og ligeledes svarer to hexadecimale cifre til en byte. Det hexadecimale talsystem har nemlig en radix på 16, og repræsenteres med følgende symboler: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E og F. Talsystemer med en radix større end 10 består som oftest af de 10 symboler fra det decimale talsystem; 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9 efterfulgt af først store bogstaver og dernæst små bogstaver, skulle dette være nødvendigt for talsystemet. Et hexadecimalt tal kunne for eksempel se ud som følgende: $2AF07D_{16}$. Tallet består af 24 bit/6 nibbles/3 bytes og benytter sig af samme positionsnotation som det decimale talsystem. Værd at vide er, at ethvert hexadecimalts system har en tilsvarende decimal talværdi, som bruges til omregning: A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14 og F = 15.

Konvertering til decimaltal

Startende fra det mindst betydende ciffer i det hexadecimale tal $2AF07D_{16}$ – dvs. D – findes først det tilsvarende decimale ciffer af D, hvilket er 13, som dernæst bruges til at finde den decimale talværdi ved at tage 13 og gange med $radix^{N-1}$, hvor radix er talsystemets grundtal, og N er cifferets position fra højre mod venstre. Gøres dette fås: $13 \cdot 16^{1-1} = 13 \cdot 16^0 = 13 \cdot 1 = 13$

Ciffer:	2	A	F	0	7	13
Position:	6	5	4	3	2	1
Potens:	$16^{6-1} = 16^5$	$16^{5-1} = 16^4$	$16^{4-1} = 16^3$	$16^{3-1} = 16^2$	$16^{2-1} = 16^1$	$16^{1-1} = 16^0$
Potensværdi:	$16^5 = 1048576$	$16^4 = 65536$	$16^3 = 4096$	$16^2 = 256$	$16^1 = 16$	$16^0 = 1$
Regnestykke 1	$2 \cdot 1048576 + 10 \cdot 65536 + 15 \cdot 4096 + 0 \cdot 256 + 7 \cdot 16 + 13 \cdot 1$					
Regnestykke 2	$2097152 + 655360 + 61440 + 112 + 13 = 2814077_{10}$					

Tabel 5.3: Konvertering fra det hexadecimale talsystem til det decimale.

Det oktale talsystem

Et andet velkendt talsystem er det oktale talsystem. Det oktale talsystem har en radix på 8, og repræsenteres af disse symboler: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 og 7. Talsystemet blev bl.a. brugt til styring af nixie-rør, som er et specielt designet neonrør til visning af cifre eller symboler, i luftfartsindustrien som kode, der transmitteres via flyenes transponder til radarer på jorden – her bliver det brugt til at kendetegne flyene på radarskærmen – samt af UNIX baserede systemer til at styre filrettigheder. Et oktalt tal kunne f.eks. se ud som følgende: 16724_8. Tallet benytter sig af samme positionsnotation som det decimale talsystem.

Konvertering til decimaltal

Startende fra det mindst betydende ciffer i det oktale tal 16724_8 - dvs. 4 - findes den decimale værdi ved at tage 1 og gange med $radix^{N-1}$, hvor radix er talsystemets grundtal, og N er cifferets position fra højre mod venstre. Gøres dette, fås: $4 \cdot 8^{1-1} = 4 \cdot 8^0 = 4 \cdot 1 = 4$

Ciffer:	1	6	7	2	4
Position:	5	4	3	2	1
Potens:	$8^{5-1} = 8^4$	$8^{4-1} = 8^3$	$8^{3-1} = 8^2$	$8^{2-1} = 8^1$	$8^{1-1} = 8^0$
Potensværdi:	$8^4 = 4096$	$8^3 = 512$	$8^2 = 64$	$8^1 = 8$	$8^0 = 1$
Regnestykke 1	$1 \cdot 4096 + 6 \cdot 512 + 7 \cdot 64 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 1$				
Regnestykke 2	$4096 + 3072 + 448 + 16 + 4 = 7636_{10}$				

Tabel 5.4: Konvertering fra det oktale talsystem til det decimale.

Decimal til andre talsystemer

Succesiv division

Successiv division kan bruges til at konvertere decimal til ethvert talsystem. Metoden fungerer påfølgende måde:

Man tager decimaltallet, som man ønsker at konvertere til et andet talsystem, og dividerer med talsystemets radix. Resultatet af divisionen findes. Hvis divisionen ikke er komplet, og der er rest, så udtrækkes denne restværdi ved at gange radix med kommaværdien i resultatet. Heltallet fra resultatet trækkes ned på en ny linje, og restværdien noteres. Dette fortsætter man med, indtil decimaltallet ikke længere kan divideres med radix. Det mindst betydende ciffer i det konverterede tal er den første restværdi, og det mest betydende ciffer i det konverterede tal er den sidste restværdi. Forvirret? Se følgende eksempler:

Decimal/radix	Resultat	Rest
206/10	20,6	6 → LSD (Least Significant Digit)
20/10	2	0
2/10	0,2	2 → MSD (Most Significant Digit)
Decimaltal	206_{10}	

Tabel 5.5: 4

Decimal til binær

Vi konverterer 412_{10} til binær:

Decimal/radix	Resultat	Rest
412/2	206	0 → LSD (Least Significant Digit)
206/2	103	0
103/2	51,5	1
51/2	25,5	1
25/2	12,5	1
12/2	6	0
6/2	3	0
3/2	1,5	1
1/2	0,5	1 → MSD (Most Significant Digit)
Binært tal	$1\ 1001\ 1100_2$	

Tabel 5.6: 4

Decimal til hexadecimal

Vi konverterer 15642_{10} til hexadecimal:

Decimal/radix	Resultat	Beregning af rest	Rest
15642/16	977,625	$0{,}625 \cdot 16 = 10_{10} = A_{16}$	A → LSD (Least Significant Digit)
977/16	61,0625	$0{,}0625 \cdot 16 = 1_{10} = 1_{16}$	1
61/16	3,8125	$0{,}8125 \cdot 16 = 13_{10} = D_{16}$	D
3/16	0,1875	$0{,}1875 \cdot 16 = 3_{10} = 3_{16}$	3 → MSD (Most Significant Digit)
Hexadecimalt tal	$3D1A_{16}$		

Tabel 5.7: 4

Konverteringer

Binær til hexadecimal

4 bit - én nibble - svarer til ét hexadecimalt ciffer. Eksempel med et binært tal: $1101\ 1011\ 1111\ 0011\ 0110_2$:

Binær:	1101	1011	1111	0011	0110
Decimalværdi:	13	11	15	3	6
Hexadecimalciffer:	D	B	F	3	6
Hexadecimal:	$1101\ 1011\ 1111\ 0011\ 0110_2 = DBF36_{16}$				

Hexadecimal til binær

Ét hexadecimalt ciffer svarer til 4 bit - én nibble. Eksempel med $F37A0_{16}$:

Hexadecimal:	F	3	7	A	0
Decimalværdi:	15	3	7	10	0
Binærværdi:	1111	0011	0111	1010	0000
Binær:	$F37A0_{16} = 1111\ 0011\ 0111\ 1010\ 0000_2$				

Binær til oktal

3 bit svarer til ét oktalt ciffer. Eksempel med det binære tal $101\ 101\ 011\ 111_2$:

Binær:	101	101	011	111
Oktalværdi:	5	5	3	7
Oktal:	$101\ 101\ 011\ 111_2 = 5537_8$			

Oktal til binær

Ét oktalt ciffer svarer til 3 bit. Eksempel med det oktale tal 74012_8:

Oktal:	7	4	0	1	2
Binærværdi:	111	100	000	001	010
Binær:	$74012_8 = 111\ 100\ 000\ 001\ 010_2$				

Oktal til hexadecimal

Der findes ikke nogen direkte konvertering fra oktal til hexadecimal. I stedet konverterer man fra oktal til binær til hexadecimal, da ét oktalt ciffer svarer til 3 bit, og ét hexadecimalt ciffer svarer til 4 bit. Vi tager som eksempel det oktale tal 46713_8:

Oktal:	4	6	7	1	3
Binær gruppering:	100 110 001 011 = 0100 1101 1100 1011				

Binær:	0100	1101	1100	1011
Decimalværdi:	4	13	12	11
Hexadecimalciffer:	4	D	C	B
Hexadecimal:	$46713_8 = 4DCB_{16}$			

Hvis du vil vide mere

Hvis du vil vide mere om talsystemer, baser og omregning mellem disse, kan du se bibliografien [17], [18], [19], [20] og [21].

5.2 Opgaver

- ### Opgave 5.2.1: Binær til decimal

Omregn følgende binære tal til decimaltal:

1)11011011_2

2)1111001100_2

3)0100110110011_2

4)11000010100101100_2

5)1000010110010011011001_2

●● Opgave 5.2.2: Hexadecimal til decimal

Omregn følgende hexadecimaltal til decimaltal:

1)$DC9_{16}$

2)$9B8B_{16}$

3)$D5D08_{16}$

4)$561CE426_{16}$

5)$C380DD1E6_{16}$

●● Opgave 5.2.3: Oktal til decimal

Omregn følgende oktaltal til decimaltal:

1)6214_8

2)4461_8

3)556244_8

4)2337562_8

5)2747632700_8

●● Opgave 5.2.4: Binær til hexadecimal

Omregn følgende binære tal til hexadecimaltal:

1)0100_2

2)10101000_2

3)0101011111_2

4)0111100100001_2

5)101100011000111_2

●● Opgave 5.2.5: Hexadecimal til binær

Omregn følgende hexadecimaltal til binære tal:

1)$A0E_{16}$

2)$09E_{16}$

3)$D8B2C_{16}$

4)$19695E7_{16}$

5)$B9D88EB871_{16}$

●● Opgave 5.2.6: Binær til oktal

Omregn følgende binære tal til oktaltal:

1)100_2

2)111001_2

3)11000010_2

4)11011011101_2

5)1000110101010_2

●● Opgave 5.2.7: Oktal til binær

Omregn følgende oktaltal til binære tal:

1)477_8

2)1361_8

3)215633_8

4)7657642_8

5)026552264_8

●●● Opgave 5.2.8: Oktal til hexadecimal

Omregn følgende oktaltal til hexadecimaler:

1)261_8

2)4321_8

3)213543_8

4)7613542_8

5)214615364_8

5.3 Programmering

Så du vil gerne være superhelt, men har ingen superkræfter? Frygt ej! Allerede i dag er vi mega afhængige af teknologi, så det at kunne styre teknologien er faktisk næsten en superkraft. Lidt ligesom Batman, som heller ikke har nogen superkræfter, men bare en masse penge og en god hjerne.

Programmering er det, der bruges til at styre næsten al teknologi nu om dage, det er alt fra computere, tablets og smartphones, til rejsekort, vaskemaskiner og biler. I datalogi er vi næsten ligeglade, hvilken ting vi programmerer til, "hjernen" i alle tingene fungerer nemlig på samme måde, der er bare forskel på, hvordan vi udnytter det.

Som udgangspunkt handler programmering bare om at skrive noget tekst, næsten ligesom en stil i skolen, der er bare nogle andre, måske lidt strengere, krav til, hvordan man skal skrive det. Her får du et klassisk eksempel på et simpelt program

```
print("Hello World!")
```

Hvis man kørte programmet, ville den skrive `Hello World!` som output. Hvis man gerne ville have den til at skrive noget andet, f.eks. `Hej Naturfagssommercamp`, så kan du måske gætte at man skal ændre teksten imellem anførselstegnene, til den ønskede tekst. Således

```
print("Hej Naturfagssommercamp")
```

`print` er en kommando, der bruges til at skrive noget tekst som output. Når man bruger kommandoen skal den vide, hvad det er den skal skrive som output, og det er derfor der er parenteser til at angive det. Anførselstegnene angiver at det handler om tekst, i stedet for f.eks. tal.

Som du kan se, så er der mange detaljer i spil. Det er lidt ligesom matematik, hvor der er en masse regler man skal følge, tilgengæld bliver det meget præcist, så der ikke er tvetydigheder. Man kan se forskellige kommandoer som forskellige "byggeklodser", og meningen med denne del af kompendiet er at lære dig om de grundlæggende klodser og reglerne, der omgiver dem. Lidt ligesom legoklodser kan det være svært at se, hvad meningen med en klods er, hvis man ser på den for sig selv, men med øvelse lærer man at sammensætte forskellige klodser til at lave hvad som helst.

Grundlæggende så er målet med et program at skabe et output af en eller anden art. For at det skal give mening skal vi kunne se at programmet har gjort noget. I starten her vil vi bruge tekst som output, men andre programmer kan f.eks. generere billeder eller lyd, og det at få vist en hjemmeside er også en form for output.

Så for at opsummere. Grundlæggende er et program, noget tekst, skrevet efter nogle regler på en måde så computeren kan forstå det, der laver et ønsket output.

Sekvens

Når man skriver et program udfører computeren det ovenfra og ned, én linje af gangen. Så hvis man skriver

```
print("Jeg")
print("er")
print("Batman")
```

så får man dette output

```
Jeg
er
```

```
Batman
```

Altså bliver hvert ord skrevet ud i rækkefølge, top til bund.

Typer

I programmering er det vigtigt at holde styr på, at der er forskel på, hvad man kan, med forskellige ting. Som eksempel ved vi at vi kan lægge tal sammen `2+3`, men hvad ville der ske, hvis vi prøvede at lægge et tal sammen med noget tekst? `2+"kat"` giver ikke rigtig mening. Så der er altså forskel på tal og på tekst. Vi siger at det er forskellige *typer*.

De første typer du skal kende er de følgende

Type	Står for	Forklaring	Eksempel
`int`	Integer	Helt tal	`42`
`float`	Floating point	Kommatal	`3.14`
`str`	String	Tekst	`"Jeg er Batman"`
`bool`	Boolean	Sandhedsværdi	`True`

Tabel 5.8: De grundlæggende typer i Python

Bemærk, at der bliver brugt punktum i stedet for komma i kommatal (`float`), som du måske ved bruges i bl.a. England og USA.

I starten kommer vi til at bruge `str` og `int` meget, men før vi er færdige, kommer du til at kende disse fire typer rigtig godt.

Hvis du er i tvivl om hvilken type noget har, så kan du skrive

```
print(type("Hej"))
```

Hvor du erstatter `"Hej"` med hvad end du gerne vil vide typen af. Her får du output

```
<class 'str'>
```

Hvor du kan se typen er `str`.

Et andet eksempel

```
print(type(42))
```

Kan du gætte hvad output er?

```
<class 'int'>
```

Aritmetik

Aritmetik er et fancy ord for regning eller udregning. Det er det du gør når du lægger tal sammen eller ganger osv. I Python fungerer det fuldstændig som man kunne ønske `+`, `-`, `*`, `/` er tegnene man bruger for plus, minus, gange og dividere. Vi kan igen bruge `print` til at lave output.

```
print(2+3)
print(3-2)
```

```
print(2*3)
print(3/2)
```

Vi vil få outputtet

```
5
1
6
1.5
```

Husk, gåseøjne angiver tekst. Du kan se forskellen i det her eksempel

```
print(2+3)
print("2+3")
```

som giver output

```
5
2+3
```

Python kender og følger reglerne for hvilken rækkefølge ting skal udregnes i, dvs. først parenteser, gange og dividere før plus og minus.

```
print(1+2*(3+4))
```

Først får vi regnet $(3+4)=7$ så får vi regnet $2\cdot 7=14$ og til sidst $1+14=15$. Så output er

```
15
```

Det er forresten ofte ligemeget om man har mellemrum eller ej, så du kan selv bestemme hvad du helst vil skrive.

```
print(1+2+3)
print( 1 + 2 + 3 )
```

Betyder præcis det samme

```
6
6
```

Tekstberegninger

Tidligere sagde vi at man ikke kan lægge tal og tekst sammen, men kan man lægge to tekststrenge sammen?

```
print("Bat" + "man")
```

Output er

```
Batman
```

Ja det kan man! Tekstrengene bliver lagt i forlængelse af hinanden.

Hvad med minus?

```
print("Batman" - "man")
```

Output er

```
TypeError                                 Traceback (most recent
    call last)
<ipython-input-1-f8fdc5e43288> in <module>()
----> 1 print("Batman"-"man")

TypeError: unsupported operand type(s) for -: 'str' and 'str'
```

Okay så der sker en fejl, man må altså ikke trække tekststrenge fra hinanden.

Kan vi bruge gange med tekststrenge? Det viser sig at det kan vi godt, men så skal vi pludselig blande tekst og tal

```
print("Ha" * 3)
```

Output er

```
HaHaHa
```

Vi får altså gentaget teksten det antal gange vi angiver med tallet.

Ligesom vi ikke kan bruge minus, så kan vi heller ikke bruge division. Det kan også være svært at forestille sig, hvad der skulle ske hvis man dividerede en tekststreng.

Variabler

Nu hvor du har en idé om, hvad de forskellige typer er, og ved lidt om, hvad man kan gøre med dem, er det blevet tid til at lære om variabler. Variabler bruges til at gemme data og referere til det senere.

Man kan tænke på en variabel som en kasse, hvor man skriver et navn udenpå, det kunne f.eks. være *yndlingshelt*, og så ligger sin yndlings superhelt derned, lad os sige det er Superman. Når man senere skal have fat i sin yndlings superhelt kan man finde kassen med navnet *yndlingshelt* og se at det sandelig var Superman. Det kan være man senere finder ud af at Batman er sejere, og så kan man gå hen og ligge Batman i *yndlingshelt* kassen i stedet for.

Det er på den måde variabler fungerer. I Python ser det således ud

```
yndlingshelt = "Superman"
print(yndlingshelt)
yndlingshelt = "Batman"
print(yndlingshelt)
```

Vi skriver først navnet på variablen ("kassen"), dernæst et lighedstegn, som betyder at vi gerne vil lægge noget ned i kassen, og til sidst, det som vi gerne vil lægge ned i kassen. I dette eksempel bruger vi tekststrenge til at repræsentere vores yndlingshelt, og vi bruger `print` til at vise, hvad der er i variablen. Bemærk at vi skriver *yndlingshelt* uden gåseøjne, fordi vi ikke vil have teksten "yndlingshelt", men vi gerne vil have indholdet af kassen *yndlingshelt*. Når man lægger noget nyt i kassen bliver det gamle glemt, og derfor er der ikke noget spor af `"Superman"` efter at `"Batman"` er blevet gemt i variablen.

Vi får følgende output

```
Superman
Batman
```

Et andet eksempel kunne være at man forsøgte at holde styr på Jokerens trusselsniveau på en skala fra 1-10. Lad os sige at det starter på 4. Hvis man gerne vil vide, hvor langt han er fra at være på det højeste niveau, gør man det ved at sige 10 minus trusselsniveauet.

Hvis vi forestiller os variablen for trusselsniveauet som en kasse, kan vi forestille os at vi gemmer et stykke papir med tallet for trusselsniveauet i kassen. Hvis vi skal vide, hvad trusselsniveauet er, kan vi gå hen til kassen og læse papiret.

I Python kan man gøre det på denne måde

```
trussel = 4
print("Jokeren er så mange trin fra højeste niveau:")
print(10-trussel)
```

Som vil give output

```
Jokeren er så mange trin fra højeste niveau:
6
```

Rigtig tit vil man gerne opdatere en variabels værdi, baseret på hvad den allerede er. Det kan være Jokeren har begået et røveri, som betyder at hans trusselsniveau skal gå 2 trin op. Så går vi hen og ser, hvad der står på papiret i kassen, regner ud hvad det er, hvis man lægger 2 til, skriver det på nyt stykke papir og lægger det ned i kassen i stedet for.

I Python gør man det således

```
trussel = 4
print("Jokeren begår et røveri")
trussel = trussel + 2
print("Jokerens trusselsniveau er nu")
print(trussel)
```

Som du kan se bliver der skrevet `trussel` på begge sider af lighedstegnet. Det der står til venstre betyder, ligesom normalt, at vi gemmer noget i `trussel` variablen, men før vi kan gemme noget, skal vi vide, hvad det er der skal gemmes. Derfor skal vi først regne ud, hvad der står på højre side. Der skal vi udregne trusselsniveauet plus 2, og først når det er udregnet, kan vi gemme det i `trussel`.

Output bliver

```
Jokeren begår et røveri
Jokerens trusselsniveau er nu
6
```

Endnu et eksempel på dette kan være denne lille tryllekunst. Start med at tænke på et tal mellem 1 og 20. Læg 1 til. Gang det nye tal med 2. Læg 4 til. Del tallet med 2. Træk det tal du startede med fra. Du er nu på 3.

I Python kunne man skrive det på den her måde

```
start = 5
nytTal = start + 1
nytTal = nytTal*2
nytTal = nytTal + 4
nytTal = nytTal / 2
nytTal = nytTal - start
print(nytTal)
```

Hvor man kunne skrive et hvilket som helst tal i stedet for 5, som den værdi variablen `start` får. Output vil altid være

```
3.0
```

Der gælder nogle regler for variabelnavne. De kan indeholde små og store bogstaver, samt tal og _, dvs. ingen bindestreger eller mellemrum. Det er også en regel at en variabel ikke må starte med et tal. Der er også nogle ord der er reserveret til noget andet, som man ikke må bruge. Så hvis du får en mærkelig fejl, så kan det være du har brugt et reserveret ord og skal prøve at navngive din variabel noget andet.

Input

Når du har siddet på internettet og indtastet f.eks. dit navn, så har du jo ikke siddet med noget kode og ændret værdien for en variabel. Så hvordan får man så input til sit program, så man ikke skal ændre koden, hver gang man vil have der skal ske noget andet? Det gør man med en funktion `input`. Den fungerer sådan at programmet står stille indtil brugeren indtaster et svar, som så bliver gemt i en variabel, før programmet fortsætter.

Hvis vi vil lave et program, hvor en person skal indtaste sit navn, og så byder programmet velkommen til personen som agent, så starter vi med at lave en variabel *navn*, som skal huske hvilket navn personen indtastede

```
navn = input()
```

Hvis man sætter en tekststreng imellem parenteserne, vil den blive skrevet som output, så personen ved, hvad der skal indtastes.

```
navn = input("Indtast dit navn")
```

Det der bliver indtastet bliver altid gemt som en tekststreng, så vi kan bruge det indtastede i vores program på denne måde

```
navn = input("Indtast dit navn")
print("Velkommen Agent " + navn)
```

Fordi man indtaster det samme sted som der kommer output, så kan det se sådan ud, hvis personen indtaster Smith

```
Indtast dit navnSmith
Velkommen Agent Smith
```

Kommentarer

Det kan lyde mærkeligt, men jo lettere kode er at læse, jo bedre. Det er f.eks. hvis man skal se på sin egen kode en uge eller en måned senere, så kan det være svært at huske, hvad man tænkte dengang. Det kan også være man skal have andre til at læse sin kode.

For at gøre sin kode mere læselig er det godt at vælge beskrivende variabelnavne, men udover det kan man også bruge såkaldte *kommentarer*. De bliver markeret med `#` og betyder at resten af linjen ikke læses af computeren, det er kun til at blive læst af mennesker.

Hvis vi tager udgangspunkt i et tidligere eksempel kunne vi tilføje kommentarer således

```
# Et program der følger Jokerens trusselsniveau
trussel = 4      # Jokerens trusselsniveau
print("Jokeren begår et røveri")
trussel = trussel + 2      # Et røveri øger trusselsniveauet med 2
print("Jokerens trusselsniveau er nu")
print(trussel)
```

Typisk har man kommentarer over et stykke kode, som forklarer i store træk, hvad meningen med koden er, og nogle gange har man kommentarer i slutningen af en linje, som forklarer nogle flere detaljer om koden på den linje.

Man kan også bruge kommentarer til meget andet, f.eks. til midlertidigt at fjerne nogle linjer fra sit program, mens man prøver noget andet, så de er nemme at tilføje igen.

Inden vi går videre til det næste, viser vi lige, hvordan man kan få tekst og tal til at blive skrevet lidt pænere. I en forkortet version af det tidligere eksempel, kan vi skrive

```
trussel = 6
print("Jokerens trusselsniveau er", trussel)
```

Vi slutter altså teksten, sætter et komma, og skriver tallet. Det giver outputtet

```
Jokerens trusselsniveau er 6
```

Python indsætter altså et mellemrum mellem teksten og tallet.

Vi kan faktisk bruge så mange kommaer vi har lyst

```
print("Jeg", "er", "Batman", 1, 2, 3)
```

Output

```
Jeg er Batman 1 2 3
```

Booleans og sammenligninger

Da vi introducerede typer, viste vi bl.a. typen `bool`, som vi skal se nærmere på nu. En værdi eller variabel af typen `bool` kan kun være enten `True` eller `False`, altså sand eller falsk, og til at starte med kan det måske virke lidt begrænset, hvad det kan bruges til, men det er faktisk noget af det mest fundamentale indenfor programmering.

Man bruger booleans til at indikere om noget er tilfældet. Det kunne f.eks. være om Batman er god eller om Jokeren er det. Det kunne se sådan ud

```
batman_good = True
joker_good = False
```

Man kan også bruge det som resultat af at sammenligne to tal. Det kunne være, hvis Batman skal finde ud af hvem af Jokeren og Bane, der har højeste trusselsniveau. Vi kan bruge `>` mellem to tal for at se om det første er større end det andet.

```
joker_trussel = 4
bane_trussel = 6
joker_over_bane = joker_trussel > bane_trussel
print(joker_over_bane)
```

Output

```
False
```

Vi kan sammenligne tal på mange måder.

Python symbol	Matematisk symbol	Forklaring	Eksempel
`>`	$>$	Større end	`4 > 2`
`>=`	$\geq$	Større end eller lig med	`4 >= 4`
`<`	$<$	Mindre end	`2 < 4`
`<=`	$\leq$	Mindre end eller lig med	`2 <= 4`
`==`	$=$	Lig med	`3 == 3`
`!=`	$\neq$	Ikke lig med	`2 != 4`

Tabel 5.9: Sammenligningsoperatorer i Python

Bemærk at når man gerne vil vide om to tal er lig med hinanden bruges to lighedstegn, fordi et enkelt lighedstegn betyder at vi laver/ændrer en variabel.

Betinget udførsel

Indtil nu, har vi haft simple programmer, der gør præcis det samme hver gang, men det kommer vi til at ændre på nu. Hvis vi forestiller os at Batman har to grader af trusselsniveauer, sådan så, alt fra 5 og ned, er lavt trusselsniveau og alt fra 6 og op er højt trusselsniveau. Så vil vi gerne have at programmet gør ekstra opmærksom på, *hvis* trusselsniveauet er højt. Dette kan vi gøre med en såkaldt `if`-sætning (det engelske ord for "hvis"). Sådan én ser sådan ud

```
trussel = 7
if trussel >= 6:
  print("Trusselsniveau højt!")
```

Som du kan se skriver vi `if`, og det der står efter kalder vi betingelsen. I dette eksempel er betingelsen om trusselsniveauet er større end eller lig med 6. Til sidst på linjen er der et kolon, som i Python betyder at der kommer noget kode som hænger sammen med den `if`-sætning. Det kode er kendetegnet ved at det er *indrykket* (på engelsk "indented") i forhold til det øvrige program. Det vil sige at linjen med `print` kun bliver udført, hvis betingelsen i `if`-sætningen er overholdt, altså at den giver værdien `True`. Så vi får output

```
Trusselsniveau højt!
```

Lige så vigtigt er det at når betingelsen ikke er opfyldt, så bliver linjen ikke udført. Se på dette eksempel

```
trussel = 4
if trussel >= 6:
  print("Trusselsniveau højt!")
```

Fordi `trussel` ikke er større end eller lig med 6, så bliver `print` ikke udført, og derfor vil der ikke være noget output fra programmet.

Men dette kan dog ændres på ved hjælp af et såkaldt else-sætning. For at en else sætning kan eksistere kræver det, at en forhenværende if-sætning findes, da det en else-sætning foretager sig er at blive udført hvis betingelsen i if'et er falskt. Eksemplet fra før udvides altså således:

```
trussel = 4
if  trussel  >= 6:
    print("Trusselsniveau højt!")
else:
    print("Trusselniveaut er lavt.")
```

Da vores trussel er på 4 og betingelsen i if evaluerer til at være falskt bliver vores else aktiveret og følgende skrives til konsolen.

```
"Trusselniveaut er lavt."
```

Det kan dog godt være, at vi har brug for, at skelne imellem hvorvidt noget har et virkeligt højt trusselsniveau, mellemt eller lavt. Til dette bliver elif-sætningen brugbar. Denne bruges efter if-sætningen og indeholder en betingelse modsat else-sætningen. Vi udvider vores trusselsniveau beskrivelse forneden:

```
trussel = 3
if  trussel  >= 6:
    print("Trusselsniveau højt!")

elif trussel > 2:
    print("Trusselsniveauet er mellemt.")
else:
    print("Trusselniveaut er lavt.")
```

Da if'et evalueres til at være falskt fortsætter koden længere ned til elif'et og evaluerer i dette tilfælde til at være sandt og følgende printes til konsolen:

```
"Trusselsniveauet er mellemt."
```

Bemærk at else-sætningen ikke bliver udført, da det kræver, at ingen af de forhenværende sætninger er blevet udført. Du kan altså ikke placerer din else-sætning før en elif eller if-sætning.

Løkker - Iteration

Et andet basalt og helt centralt koncept indenfor programming er såkaldte løkker. Der findes to typer for løkker, for-løkker og while-løkker. Vi starte med at tage udgangspunkt i førstnævnte. Fælles for løkker er, at de fortsætter med, at udføre en eller anden opgave indtil en betingelse er opnået. Se foreksempel for-løkken forneden, der demonstrere hvad der sker med Jokerens trusselsniveau efter tre røverier.

```python
trussel = 4 #Jokerens aktuelle trusselsniveau
for i in range(4):
    print("Jokerens trusselsniveau efter", i, "røverier er:",
        trussel)
    trussel += 2
```

Inden du kigger ned på hvad der bliver udskrevet til konsolen, så prøv at overvej hvad du tror, der kommer til at ske, prøv evt. at forudsige hvad den sidste og første værdi vil være. Det skal her nævnes at += operatoren bare ligger vores værdi, som i dette tilfælde er 2, oveni trusselværdien. Det er altså bare en forkortelse af at skrive, trussel = trussel + 2. Følgende vil blive skrevet til konsolen:

```
Jokerens trusselsniveau efter 0 røverier er: 4
Jokerens trusselsniveau efter 1 røverier er: 6
Jokerens trusselsniveau efter 2 røverier er: 8
Jokerens trusselsniveau efter 3 røverier er: 10
```

Så det vores for-løkke foretager sig er at den initialisere vores variabel i til at være lig 0. Derefter udføres operationen i løkken og for hver gang operationen(som er den indenterede blok) i løkken bliver udført lægges der 1 til vores variabel i indtil den betingelse, som er at, i ¡ 4 bliver falsk. Hvilket altså er når i er lig = 4 og operationen er blevet foretaget fire gange. I det der er blevet udskrevet til konsolen findes en grammatisk fejl nemlig ”1 røverier”. Det kan vi dog fikse vha. vores viden om betinget udførsel, tænk over hvordan du kunne løse det før du kigger på løsningen forneden.

```python
trussel = 4 #Jokerens aktuelle trusselsniveau
for i in range(4):
    if i == 1:
        print("Jokerens trusselsniveau efter", i, "røveri er:",
            trussel)
    else:
        print("Jokerens trusselsniveau efter", i, "røverier er:",
            trussel)
    trussel += 2
```

Da det er røveri 1, der er den eneste grammatiske undtagelse kan vi bare tjekker hvorvidt vi er nået til det første røveri, altså hvor i er lig med 1 og udskrive det grammatiske korrekte til konsolen. Da i kun er 1 en gang, vil den i alle andre tilfælde bare fortsætte ned til else-sætningen og udføre denne blok og afsluttede uanset hvad med at lægge 2 til vores trusselsniveau.

Bibliografi

[1] Allan Baktoft. *Matematik i virkeligheden Bind 2*. 3. udg. Forlaget Natskyggen, 2017. ISBN: 978-87-92857-15-6.

[2] Jesper Lützen. *Diskrete Matematiske Metoder*. 2. udg. Københavns Universitet, 2019.

[3] Wikimedia. *Image-Koenigsberg - Wikimedia*. 2016. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Image-Koenigsberg,_Map_by_Merian-Erben_1652.jpg (bes. 28.12.2019).

[4] *Introduction to Algorithms*. 3. udg. Massachusetts Institute of Technology, 2009. ISBN: 978-0-262-53305-8.

[5] Lars Pedersen. *Matematik 112. Førstehjælp til formler*. dansk. 3. udg. PRAXIS - Nyt Teknisk Forlag, 2014. ISBN: 978-87-571-2662-4.

[6] Laura Møller Jensen og Søren Munthe Kim Bruun Hans Birger Jensen. *Isis Kemi C (Læreplan 2017)*. Dansk. Systime, 2018. ISBN: 9788761689214.

[7] Wikimedia. *ImagePotassium permanganate - Wikimedia*. 2015. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Potassium_permanganate_sample.jpg (bes. 05.01.2020).

[8] Gray Dickerson og Haight. *Acid-Base Titration Schematic*. 1979. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ChemicalPrinciplesFig2-3.jpg (bes. 05.01.2020).

[9] Ole B. Lyshede og Gunnar Rylander Hansen. *Julens nødder*. Engelsk. URL: http://botaniskforening.dk/wp-content/uploads/2015/12/Julens_noedder.pdf (bes. 27.04.2003).

[10] Åse Jespersen og Jørgen Lützen. *Zoologisk morfologi*. Dansk. 4. udg. Gyldendal, 2012. ISBN: 978-87-02-12764-5.

[11] Sea Grant Consortium. *SQUID DISSECTION*. Engelsk. URL: http://njseagrant.org/wp-content/uploads/2014/03/squid_dissection.pdf (bes. 17.03.2019).

[12] CNX OpenStax. *Bacterial morphology diagram*. 2016. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Figure_04_02_02.jpg (bes. 05.01.2020).

[13] Mariana Ruiz Villarreal. *Average prokaryote cell*. Offentligt domæne. 2008. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Average_prokaryote_cell-_en.svg (bes. 05.01.2020).

[14] Mariana Ruiz. *Bacterial morphology diagram*. 2006. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bacterial_morphology_diagram.svg (bes. 05.01.2020).

[15] Szőcs Tamás. *Gram-Cell*. 2009. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:LaborMik2.jpg (bes. 05.01.2020).

[16] Graevemoore. *Gram-Cell*. 2008. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gram-Cell-wall.svg (bes. 05.01.2020).

[17] Salman Khan. *Introduction to number systems and binary — Pre-Algebra — Khan Academy*. 2014. URL: https://www.youtube.com/watch?v=ku4KOFQ-bB4 (bes. 15.01.2020).

[18] Neso Academy. *Introduction to Number Systems*. 2015. URL: https://www.youtube.com/watch?v=crSGS1uBSNQ (bes. 15.01.2020).

[19] The Organic Chemistry Tutor. *Number Systems Introduction - Decimal, Binary, Octal, Hexadecimal & BCD Conversions*. 2018. URL: https://www.youtube.com/watch?v=L2zsmYaI5ww (bes. 15.01.2020).

[20] TED-Ed. *A brief history of numerical systems - Alessandra King*. 2017. URL: https://www.youtube.com/watch?v=cZH0YnFpjwU (bes. 15.01.2020).

[21] Techquickie. *Binary Numbers and Base Systems as Fast as Possible*. 2014. URL: https://www.youtube.com/watch?v=LpuPe81bc2w (bes. 15.01.2020).

Velkommen til Sukkertoppen Gymnasium

Sukkertoppen Gymnasium er et stort, veldrevet gymnasium med fokus på naturvidenskab, teknologi og design.
Vores nøglebegreber er høj faglighed, stor rummelighed og et aktivt og alsidigt studiemiljø med en levende kultur både fagligt og socialt.

Du arbejder med både teori og praksis og får selvfølgelig mulighed for at slippe din indre forskerspire eller opfinder løs i vores topmoderne laboratorier og værksteder.

Hvad enten du drømmer om at deltage i kemi-olympiade eller arrangere weekendlange LAN-parties, er Sukkertoppen stedet for dig.

På Sukkertoppen Gymnasium bliver du en del af et stærkt fagligt miljø, hvor du som elev udfordres til at blive så dygtig som muligt. Det kommer blandt andet til udtryk, når vi hvert år har elever med til DM i teknologi, DM i science, biologi OL, kemi OL, datalogi OL, Georg Mohr og meget mere.

Vores 1100 elever er ambitiøse, målrettede og trives i et godt studiemiljø, hvor der er klare retningslinjer og et godt sammenhold. Vi har et aktivt elevråd og en god dialog mellem eleverne og ledelsen. Det er med til at skabe den gode stemning, du vil opleve på Sukkertoppen.

Det sociale liv er en vigtig del af gymnasiet.
På Sukkertoppen har vi et godt socialt miljø med fester, brætspilscafeer, filmklub, idrætsdage, musikarrangementer, fredagscafeer og meget andet.

Sukkertoppen Gymnasium er stolt af at huse UNF's Naturfagssommercamp

Dansk Ungdoms Fællesråd - DUF

Grundet Corona-situationen har DUF modtaget en større sommerpulje til at støtte diverse sommeraktiviteter for børn og unge i Danmark. Det er denne pulje, der udgør det økonomiske grundlag for denne camp. Mere information om DUF kan findes her: https://duf.dk/